Iterasjon

$\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, startpunkt: $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}$

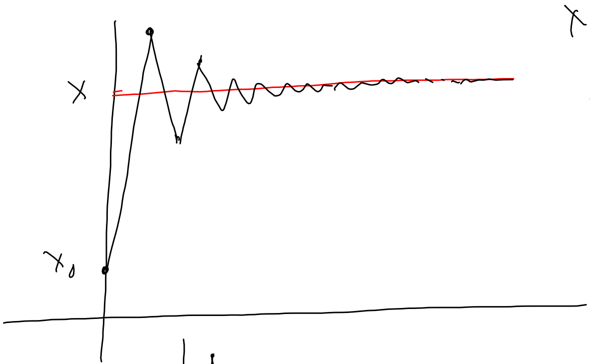
Iterasjon: $\vec{x}_0,\ \vec{x}_1 = \vec{F}(\vec{x}_0),\ \vec{x}_2 = \vec{F}(\vec{x}_1) = \vec{F}(\vec{F}(\vec{x}_0)) = \vec{F}^{\circ 2}(\vec{x}_0),$

$\vec{x}_3 = \vec{F}(\vec{x}_2) = \vec{F}(\vec{F}(\vec{F}(\vec{x}_0))) = \vec{F}^{\circ 3}(\vec{x}_0), \dots$

Intuisjon: $\vec{x}_n$ er tilstanden til systemet ved tiden t, $\vec{F}$ er mekanismen som endrer tilstanden fra tidspunkt til tidspunkt.

$f: [0,\pi] \to [0,\pi]$ $\quad f(x) = a \sin x \quad 0 \le a \le \pi$

$a = 2.0$

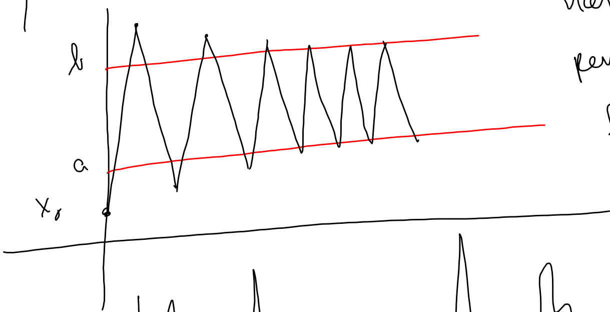


$x_n \to x$ grenseverdi

x "likevektstilstand"

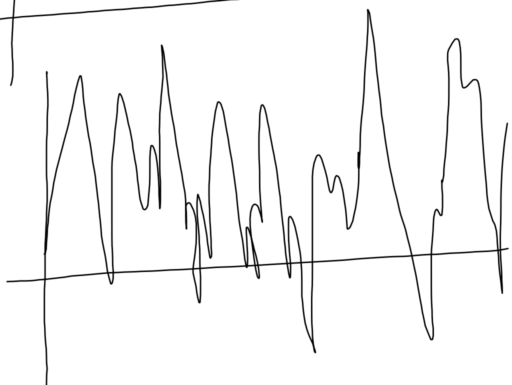
$x = f(x)$ "fikspunkt"

$a = 2.5$



nærmer seg en periodisk bane av lengde

$a = 3.0$



Kaos

Forskjellig oppførsel ved ulike startpunkter

$x_0 \longrightarrow$ periode med lengde 3

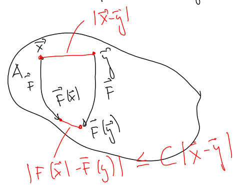
$x_0' \longrightarrow$ periode med lengde 529

Banachs fikspunktsteorem

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ lukket, $\vec{F}: A \to A$.

$\vec{F}$ kalles en kontraksjon dersom det fins et tall C, $0 < C < 1$, slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C|\vec{x}-\vec{y}| \text{ for alle } \vec{x},\vec{y} \in A.$$



$\vec{x}_0,\ \vec{x}_1 = \vec{F}(\vec{x}_0),\ \vec{x}_2 = \vec{F}^{\circ 2}(\vec{x}_0), \dots$

$\vec{y}_0,\ \vec{y}_1 = \vec{F}(\vec{y}_0),\ \vec{y}_2 = \vec{F}^{\circ 2}(\vec{x}_0), \dots$

$|\vec{x}_1 - \vec{y}_1| \leq C|\vec{x}_0 - \vec{y}_0|$

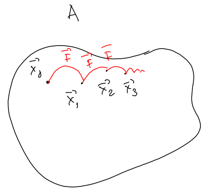
$|\vec{x}_2 - \vec{y}_2| \leq |\vec{F}(\vec{x}_1) - \vec{F}(\vec{y}_1)|$

$\leq C|\vec{x}_1 - \vec{y}_1| \leq C^2|\vec{x}_0 - \vec{y}_0|$

Generell: $|\vec{x}_n - \vec{y}_n| \leq C^n |\vec{x}_0 - \vec{y}_0|$

Dette betyr spesiell:

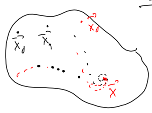
$$|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n| = |\vec{F}^{\circ n}(\vec{x}_1) - \vec{F}^{\circ n}(\vec{x}_0)| \leq C^n |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$$



Banachs fikspunktteorem: Anta at A er en lukket delmengde av $\mathbb{R}^m$ og at $\vec{F}: A \to A$ er en kontraksjon. Da har $\vec{F}$ et entydig fikspunkt $x \in A$ og uansett hvilken $\vec{x}_0 \in A$ vi velger, så vil følgen

$$\vec{x}_0,\ \vec{x}_1 = \vec{F}(\vec{x}_0),\ \vec{x}_2 = \vec{F}(\vec{x}_1), \dots$$

konvergere mot $\vec{x}$.



Bevis: La oss først vise at det ikke kan finnes mer enn ett fikspunkt. Anta at $\vec{x}, \vec{y}$ er to fikspunkter, vi skal vise at $\vec{x} = \vec{y}$.

$$|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C|\vec{x}-\vec{y}|,$$

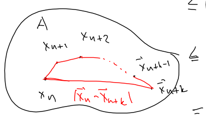
dvs at $|\vec{x}-\vec{y}| = 0$, dvs $\vec{x} = \vec{y}$.

Velg $\vec{x}_0 \in A$, vi skal vise at $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ konvergerer. Det holder å vise at $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy-følge. Vi ser på avstanden mellom to ledd

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_{n+k}| = |(\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}) + (\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}) + (\vec{x}_{n+2} - \ ) \dots + (\vec{x}_{n+k-1} - \vec{x}_{n+k})|$$

$$\leq |\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}| + |\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}| + \dots + |\vec{x}_{n+k-1} - \vec{x}_{n+k}|$$

$$\leq C^n |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| + C^{n+1}|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| + \dots + C^{n+k-1}|\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$$



$$\leq |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \underbrace{\left(C^n + C^{n+1} + \dots + C^{n+k-1} + C^{n+k} + \dots\right)}_{\text{geometrisk}}$$

$$= |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \frac{C^n}{1-C} \longrightarrow 0 \text{ når } n \to \infty$$

Altså er $\{\vec{x}_n\}$ en Cauchyfølge og konvergerer mot et punkt $\vec{x}$, og $\vec{x} \in A$ siden A er lukket.

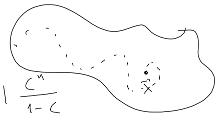
Vi ser at $\vec{x}$ er et fikspunkt for $\vec{F}$:

$$\left.\begin{array}{ccc} \vec{x}_{n+1} & = & \vec{F}(\vec{x}_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vec{x} & & \underbrace{\vec{x}}_{\vec{F}(\vec{x})} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{F}(\vec{x})$$

Hurra, $\vec{x}$ er et fikspunkt!

Siden det ikke kan finnes mer enn ett fikspunkt, konvergerer følgen $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ mot det samme (fiks)punktet uansett hvilken $\vec{x}_0$ vi starter med.

Hva er vitsen, tjukken? $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$



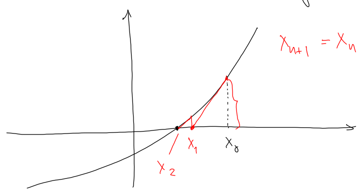
$$|\vec{x}_n - \vec{x}_{n+k}| \leq |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \frac{c^n}{1-c}$$

$$\Big\downarrow k \to \infty$$

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| \leq |\vec{x}_1 - x_0| \frac{c^n}{1-c}$$

Newtons metode i flere variable

I én variabel: Løser ligningen $f(x)=0$ numerisk.



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

I flere variable: Vi finne nullpunkter til $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ numerisk.

Tre ligninger med tre ukjente

$$x e^{y+\cos z} + x^2 \ln(y^2+z^2+1) = 0$$

$$x^2 + y e^{z^3-x} + 2\arctan(x+y) = 0$$

$$x - y + e^{z^3 \arctan(e^{x+y^2})} = 0$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x e^{y+\cos z} + x^2 \ln(y^2+z^2+1) \\ x^2 + y e^{z^3-x} + 2\arctan(x+y) \\ x - y + e^{z^3 \arctan(e^{x+y^2})} \end{pmatrix} \qquad \vec{F}(x,y,z) = \vec{0}$$

Utgangspunkt: Har en funksjon $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, vil finne et punkt $\vec{x}$ slik at $\vec{F}(\vec{x}) = 0$. Fikk et tips om at $\vec{x}_0$ ikke var så langt unna. Ønsker å forbedre tipset.

Vil egentlig: Løse $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ i nærheten av $\vec{x}_0$, men det er for vanskelig.

Kan vi finne en enklere ligning?

Bytter ut $\vec{F}(\vec{x})$ med lineariseringen $\vec{T}_{\vec{x}_0}\vec{F}$ i $\vec{x}_0$:

$$T_{\vec{x}_0}\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_0) + \underline{\underline{\vec{F}'}}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Finner nullpunktet til $T_{\vec{x}_0}\vec{F}(\vec{x})$ istedenfor:

$$\vec{F}(\vec{x}_0) + \vec{F}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$$

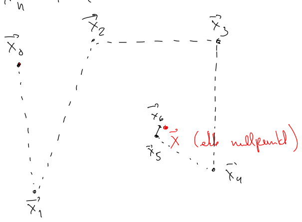
$$\underbrace{\vec{F}'(x_0)}_{m \times m\text{-matrise}}(\vec{x} - \vec{x}_0) = -\vec{F}(\vec{x}_0) \qquad \Big|\ \vec{F}'(\vec{x}_0)^{-1}$$

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) = -\vec{F}'(\vec{x}_0)^{-1}\vec{F}(\vec{x}_0)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 - \vec{F}'(x_0)^{-1}\vec{F}(\vec{x}_0)$$

Newtons metode: Velger $\vec{x}_0$ (litt smart, takk)

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \vec{F}'(\vec{x}_n)^{-1}\vec{F}(\vec{x}_n)$$



$\Rightarrow$ Invers og implisitt funksjonsteorem 5.6