Analysedrypp I: Bevis, mengder og funksjoner

Hensikten med “Analysedrypp” er å bygge en bro mellom MAT1100 og MAT1110 på den ene siden og MAT2400 på den andre. Egentlig burde det være unødvendig med en slik bro — temamessig er det slett ikke noe gap mellom kursene, tvert imot blir en del stoff fra MAT1100 og MAT1110 repetert i nesten samme form i MAT2400. Den store forskjellen er at dette stoffet nå må tas på alvor av alle, mens det i MAT1100/1110 kanskje ble oppfattet som “krydder” for de aller ivrigste og flinkeste. Denne forskjellen kommer tydelig frem i eksamensoppgavene: Der man tidligere har kunnet redde seg på regneoppgavene, må man i MAT2400 få til noen av de teoretiske oppgavene for å oppnå en anstendig karakter. Trøsten er at teorien ikke er så forferdelig vanskelig hvis man bare arbeider systematisk med den fra starten av.

1 Litt om bevis

Matematisk teori er bygget opp av bevis. Bevisene har minst to formål: I tillegg til å sikre at resultatene våre faktisk *er* sanne, skal de fortelle oss *hvorfor* de er sanne. Det siste aspektet er kanskje det viktigste når du lærer en ny matematisk teori — det er nesten umulig å få oversikt og sammenheng dersom du ikke skjønner hvordan resultatene bygger på hverandre. En matematisk teori består av hundrevis av resultater, men bare noen få ideer og teknikker, og behersker du disse få ideene og teknikkene, får de mange hundre resultatene en sammenheng og en struktur som gjør det mulig å huske og forstå dem. I tillegg er bevisene i lærebøkene eksempler på resonnementstyper du selv må kunne gjennomføre for å løse oppgaver.

Det er ikke noe hokus-pokus med matematiske bevis, de er bare sunn fornuft satt i system. Et bevis er en argumentkjede som gir deg en logisk uangripelig bro fra noe du allerede vet, til det du skal bevise. Formålet med argumentene er litt annerledes enn i diskusjoner og debatter — her gjelder det ikke med alle midler å overbevise andre om at du har rett, her gjelder det å finne ut hva som faktisk er riktig. Er det en svakhet i argumentasjonen din, lurer du først og fremst deg selv.

Selv om matematiske bevis ikke er noe hokus-pokus, men bare vanlig fornuft, er det noen få ting det er lurt å være klar over. I matematikk er det mange påstander av typen ”Hvis A, så B”. Det betyr bare at hver gang A inntreffer, så inntreffer også B. Et typisk eksempel er: “Hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar, så er f kontinuerlige”. Dette betyr bare at hvis du treffer på en funksjon, og den viser seg å være deriverbar, så vil den alltid være kontinuerlig. Med symboler skriver vi $A \Longrightarrow B$ for “Hvis A, så B”, og vi sier også “A impliserer B” eller “A medfører B”.

Vær oppmerksom på at $A \Longrightarrow B$ og $B \Longrightarrow A$ betyr helt forskjellige ting: I det første tilfellet sier vi at hver gang A inntreffer, så inntreffer også B; i det andre tilfellet sier vi at hver gang B inntreffer, så inntreffer også A. Det er åpenbart forskjell på å si "Hvis $n = 17$, så er n et primtall" og "Hvis n er et primtall, så er $n = 17$" — det første er riktig, det andre er opplagt galt.

Hvis vi både har $A \Longrightarrow B$ og $B \Longrightarrow A$, så sier vi at A og B er *ekvivalente* og skriver $A \Longleftrightarrow B$. Dette betyr at de to påstandene A og B er sanne i nøyaktig de samme tilfellene. Med ord sier vi gjerne "A hvis og bare hvis B". Et eksempel er:

"I en trekant er alle vinklene like store hvis og bare hvis alle sidene er like lange."

Dette betyr at desom du tar en titt på alle verdens trekanter, vil de der alle vinklene er like store, være nøyaktig de samme som de der alle sidene er like lange.

Når man skal bevise $A \Longleftrightarrow B$-utsagn, lønner det seg ofte å vise $A \Longrightarrow B$ og $B \Longrightarrow A$ hver for seg.

Hvis du tenker deg om litt, vil du innse at $A \Longrightarrow B$ betyr akkurat det samme som ikke-$B \Longrightarrow$ ikke-A. Det betyr at istedenfor å bevise $A \Longrightarrow B$, kan vi bevise ikke-$B \Longrightarrow$ ikke-A. I noen tilfeller lønner dette seg fordi hypotesen "ikke-B" gir oss mer å arbeide med enn hypotesen A. Når vi beviser $A \Longrightarrow B$ ved isteden å argumentere for ikke-$B \Longrightarrow$ ikke-A, utfører vi et *kontrapositivt bevis*. Her er et enkelt eksempel på et kontrapositivt bevis:

Setning 1.1 *Hvis n^2 er et partall, så er n et partall.*

Bevis: Det kontrapositive utsagnet er

> "Hvis n er et oddetall, så er n^2 et oddetall."

For å bevise dette, bruker vi at hvis n er et oddetall, så er $n = 2k + 1$ for et helt tall k. Dermed er $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ som åpenbart er et oddetall. $\square$

I beviset ovenfor er det naturlig å argumentere kontrapositivt siden "n er et oddetall" er en enklere antagelse å arbeide med enn "n^2 er et partall".

Det er en bevisform til som det kanskje er lurt å peke på, såkalte *motsigelsesbevis*. I et motsigelsesbevis antar du det omvendte av det du skal bevise, og viser at dette leder til noe som er åpenbart galt. Dermed må det være det du skulle bevise, som er riktig. Her er et berømt eksempel på et motsigelsesbevis:

Setning 1.2 *$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.*

Bevis: Anta for motsigelse at $\sqrt{2}$ er rasjonal. Da kan $\sqrt{2}$ skrives som en brøk

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

der m og n er naturlige tall uten felles faktorer (vi har altså forkortet brøken så mye som mulig). Kvadrerer vi denne ligningen og ganger med n^2 på begge sider, får vi

$$2n^2 = m^2$$

Dette betyr at m^2 er et partall, og ifølge setning 1.1 er da m et partall, dvs. $m = 2k$ for et naturlig tall k. Setter vi dette inn i den siste ligningen ovenfor, ser vi at $2n^2 = 4k^2$, dvs. $n^2 = 2k^2$. Etter setning 1.1 betyr dette at også n er et partall, men det er umulig siden m og n ikke har felles faktorer. Dermed har vi vist at antagelsen om at $\sqrt{2}$ er rasjonal, fører til en selvmotsigelse, og følgelig må $\sqrt{2}$ være irrasjonal. $\square$

2 Mengder

Mengde er det grunnleggende begrepet i matematikken — alle andre begreper kan bygges opp fra mengdebegrepet. Så ambisiøse skal ikke vi være, for oss skal mengder bare være et praktisk arbeidsredskap for å holde styr på ganske enkle fenomener. Vi skal derfor ikke forsøke å gi en dypsindig definisjon av hva en mengde er, bare si at det er en samling matematiske objekter. Mengdene du støter på i MAT2400, vil som regel være samlinger av tall, punkter, vektorer eller funksjoner.

En mengde kan godt være endelig, som mengden $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bestående av tallene 1, 2, 3, 4 og 5, eller uendelig som mengden $B = [0, 1]$, bestående av alle reelle tall x slik at $0 \leq x \leq 1$. For å si at et objekt x hører med i mengden A, skriver vi gjerne $x \in A$, og for å si at objektet y *ikke* er med i A, skriver vi $y \notin A$. De objektene som er med i en mengde A, kaller vi *elementene* til A. En litt spesiell mengde er *den tomme mengden* $\emptyset$, mengden uten elementer. Det kan virke som en selvmotsigelse å kalle dette en mengde, men den tomme mengden er så nyttig at det ville være en stor ulempe å ekskludere den på grunn av filologisk finfølelse.

To mengder A og B er like dersom de har nøyaktig de samme elementene, og i så fall skriver vi (ikke overraskende!) $A = B$. Dersom alle elementene i A er med i B (men ikke nødvendigvis omvendt), sier vi at A er en *delmengde* av B og skriver $A \subset B$. Legg merke til at hvis både $A \subset B$ og $B \subset A$, så er $A = B$. Når vi skal bevise at to tilsynelatende forskjellige mengder faktisk er like, lønner det seg ofte å bevise $A \subset B$ og $B \subset A$ hver for seg. Vi skal se eksempler på dette etter hvert.

Det er to måter å skrive mengder på som ofte er nyttige. Den ene er *listeform*

$$A = \{1, 3, 7, 11, 13\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$$

Den andre er ved hjelp av en såkalt *mengdebygger*;

$$A = \{a \in B \,|\, a \text{ tilfredsstiller betingelsen } C\}$$

Her er A definert som alle elementene i B som tilfredsstiller en betingelse C. Vi kan for eksempel definere mengden av positive tall ved

$$A = \{a \in \mathbb{R} \,|\, a > 0\}$$

Husk at en del tallmengder har etablerte navn

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}, \text{ mengden av naturlige tall}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, \text{ mengden av hele tall}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}, \text{ mengden av rasjonale tall}$$

$$\mathbb{R}, \text{ mengden av relle tall}$$

$$\mathbb{C}, \text{ mengden av komplekse tall}$$

De to viktigste operasjonene for mengder er *snitt* $\cap$ og *union* $\cup$. Dersom vi har mengder $A_1, A_2 \ldots, A_n$, er snittet definert ved

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \,|\, x \text{ er med i } \textit{alle} \text{ mengdene } A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

og unionen ved

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \,|\, x \text{ er med i } \textit{minst én av} \text{ mengdene } A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

Legg merke til at hvis A og B ikke har felles elementer, så er $A \cap B = \emptyset$. I så fall sier vi at A og B er *disjunkte*.

Man kan "gange" mengder inn og ut av paranteser omtrent som man kan med tall, dvs. man har de *distributive lovene*

$$B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \ldots \cap (B \cup A_n) \quad (2.1)$$

og

$$B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n) \quad (2.2)$$

La oss bevise (2.1) som et eksempel på hvordan man beviser likheter mellom mengder. Vi skal først vise at dersom x er med i mengden til venstre, så må den også være med i mengden til høyre, og deretter at hvis x er med i mengden til høyre, så må den også være med i mengden til venstre. Dette vil vise at mengdene er like.

Anta $x \in B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$, da er x med i enten B eller $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$. Dette betyr at x enten er med i B eller i alle $A_1, A_2, \ldots, A_n$. I begge tilfeller er $x \in B \cup A_1, x \in B \cup A_2, \ldots, x \in B \cup A_n$, dvs.

$$x \in (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \ldots \cap (B \cup A_n)$$

Anta nå omvendt at $x \in (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \ldots \cap (B \cup A_n)$. Da er x med i $B \cup A_i$ for alle i. Det betyr at enten er $x \in B$, eller så må $x \in A_i$ for alle i, dvs. $x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots, A_n$. Uansett hvilket av disse alternativne som gjelder, er $x \in B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$, og dermed er (2.1) bevist.

Det finnes andre mengdeoperasjoner enn snitt og union, f.eks. *differansen*

$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}$$

Den er ofte nyttig når vi skal unnta punkter, slik som i

$$A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

der A består av alle reelle tall unntatt -1 og 3.

Som regel er alle mengdene vi er interessert i, delmengder av en større mengde U — et "univers" som de andre mengdene lever innenfor. Jobber vi med tall på tallinjen, er det ofte naturlig å tenke på $\mathbb{R}$ som universet; jobber vi med punkter i planet, er det naturlig å tenke på $\mathbb{R}^2$ som universet; jobber vi med et vektorrom V, er det naturlig å tenke på dette som universet osv. Hvis vi er blitt enig om et univers U, er det nyttig å definere *komplementet* til en delmengde A av U ved

$$A^c = \{x \in U \,|\, x \notin A\}$$

To nyttige formler binder sammen komplementet med snitt og union. De kalles *De Morgans lover*:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c \tag{2.3}$$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c \tag{2.4}$$

Den enkleste måten å huske disse reglene på er å si at dersom vi skal ta komplementet til en union eller et snitt, kan vi flytte komplementtegnet inn på hver enkelt mengde, men da må vi gjøre om snittene til unioner og omvendt.

La oss bevise (2.3) som enda et eksempel på hvordan vi beviser likhet mellom mengder. Vi må vise at det er nøyaktig de samme elementene som med i begge mengder. At $x \in (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c$, er det samme som at $x \notin A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$. Det er det samme som at det finnes minst én i slik at $x \notin A_i$, og det er det samme som at det finnes minst én i slik at $x \in A_i^c$, som igjen er det samme som at $x \in A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c$. Dermed er (2.3) bevist.

3 Funksjoner

Du er nok mest vant til funksjoner mellom tallmengder, men funksjoner kan vi faktisk ha mellom alle mengder. Hvis A og B er to mengder, er en *funksjon fra A til B* bare en regel som til hvert element i A tilordner et element $f(x)$ i B. Vi skriver $f : A \to B$ for å markere at f er en funksjon fra A til B. Funksjoner mellom generelle mengder er egentlig ikke vanskeligere enn de funksjonene du er mest vant til, men er du blant dem som først og fremst forbinder funksjoner med funksjonsgrafer, må du nok arbeide litt for å få et mer abstrakt bilde — funksjoner mellom generelle mengder har ikke grafer i tradisjonell forstand.

Anta at C er en delmengde av A. *Bildet av C* under f er da mengden

$$f(C) = \{f(x) \,|\, x \in C\}$$

dvs. mengden av alle verdier $f(x)$ når x ligger i C. Bildet $f(A)$ av hele A kalles ofte *bildet til f*.

Hvis vi isteden starter med en mengde $D \subset B$, kan vi danne det *inverse bildet*

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \,|\, f(x) \in D\}$$

Det inverse bildet $f^{-1}(D)$ består altså av alle de elementene i A som havner i D når vi bruker f på dem. Bilder og inverse bilder spiller en sentral rolle i all videregående matematikk.

En funksjon $f : A \to B$ kaller *surjektiv* dersom $f(A) = B$, dvs. hvis alle elementene i B treffes av minst ett element i A. Vi kaller f *injektiv* dersom $x_1 \neq x_2$ medfører $f(x_1) \neq f(x_2)$, dvs. dersom f sender ulike elementer i A på ulike elementer i B. En funksjon som både er injektiv og surjektiv, kalles *bijektiv*. For en bijektiv funksjon vil det for hver $y \in B$ finnes nøyaktig én $x \in A$ slik at $y = f(x)$. En bijektiv funksjon har derfor en *omvendt funksjon* $g : B \to A$ gitt ved

$$g(y) = x \text{ der } x \text{ er elementet i } A \text{ slik at } y = f(x)$$

Den omvendte funksjonen til f betegnes ofte med f^{-1}. Legg merke til at dersom f er injektiv, men ikke surjektiv, så kan vi gjøre f surjektiv ved å tenke på den som en funksjon $f : A \to f(A)$. Den får da en invers funksjon $f^{-1} : f(A) \to A$.

La oss avslutte denne seksjonen med et kort blikk på sammensatte funksjoner. Dersom vi har to funksjoner $f : A \to B$, $g : B \to C$, er den sammensatte funksjonen $h : A \to C$ gitt ved $h(x) = g(f(x))$ (du kjenner slike funksjoner fra kjerneregelen). Ofte skriver man $g \circ f$ for den sammensatte funksjonen; altså $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

4 Tellbarhet

La oss helt til slutt i denne seksjonen se på et litt mer avansert begrep fra mengdelæren. En mengde A er *tellbar* dersom det går an å lage en liste $a_1, a_2, a_3, \ldots$ som inneholder alle elementene i A (samme element må gjerne komme flere ganger). En endelig mengde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ er åpenbart tellbar siden vi f.eks. kan liste den på denne måten

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_n, a_n \ldots$$

Mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall er også tellbar siden den er ferdig listet:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Vi kan også liste mengden $\mathbb{Z}$ av alle hele tall:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

Det neste resultatet viser at det finnes ganske mange tellbare megnder. Dersom A og B er mengder, skriver vi $A \times B$ for mengden av alle par (a, b) der $a \in A$, $b \in B$.

Setning 4.1 *Dersom A og B er tellbare, så er $A \times B$ det også.*

Bevis: Vi vet at vi kan liste alle elementene i A:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

og B:

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$$

Vi kan nå liste alle parene i $A \times B$ på denne måten

$$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1)(a_2, b_2), (a_1, b_3), (a_4, b_1), \ldots$$

Det skulle ikke være så vanskelig å gjennomskue metoden: Først lister vi alle par der summen av indeksene er 2 (det er bare ett slikt par), så lister vi alle par der summen av indeksene er 3, deretter alle der summen av indeksene er 4, osv. Dette gir en opplisting av alle parene i $A \times B$. $\square$

Setningen ovenfor har en overraskende konsekvens:

Teorem 4.2 *Mengden $\mathbb{Q}$ av rasjonale tall er tellbar.*

Bevis: Siden både $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$ er tellbare, forteller setningen ovenfor oss at $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ er tellbar. La

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4) \ldots$$

være en opplisting av alle elementene i $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, Da er

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}, \ldots$$

en opplisting av alle elementene i $\mathbb{Q}$, og følgelig er $\mathbb{Q}$ tellbar (det spiller ikke noen rolle at alle elementene i $\mathbb{Q}$ vil komme mange ganger på listen i forkortet og uforkortet form). $\square$

Man kan jo begynne å lure på om alle mengder er tellbare, men det er ikke tilfellet:

Teorem 4.3 *Mengden* $\mathbb{R}$ *av alle reelle tall er* ikke *tellbar.*

Bevis: (Cantors diagonalargument) Anta for motsigelse at $\mathbb{R}$ er tellbar og kan bli listet: $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Vi skriver opp desimalutviklingen til tallene på listen:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & w_1.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots \\ r_2 & = & w_2.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \\ r_3 & = & w_3.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots \\ r_4 & = & w_4.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

(w_i er heltallsdelen til r_i, og $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$ desimalene). For å få motsigelsen vår innfører vi et nytt tall c med desimalutvikling $c = 0.c_1c_2c_3c_4\ldots$ der desimalene er definert ved:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{ii} \neq 1 \\ \\ 2 & \text{if } a_{ii} = 1 \end{cases}$$

Dette tallet må være forskjellig fra det i-te tallet r_i på listen siden de i-te desimalene er forskjellige (siden c har bare 1 og 2 som desimaler, er det ingen problemer med at c kan ha to desimalutviklinger). Dermed er c forskjellig fra alle tallene på listen, og vi har fått en motsigelse siden vi antok at alle reelle tall (inkludert c) var på listen. $\square$

Ofte er det en stor ulempe at $\mathbb{R}$ ikke er tellbar. Teorem 4.2 redder imidlertid en del — i mange av de situasjonene der vi skulle ønske oss at de reelle tallene var tellbare, kan vi komme oss ut av problemene ved å bruke at $\mathbb{Q}$ er tellbar. Det skyldes at de rasjonale tallene ligger tett i $\mathbb{R}$, og at alle reelle tall derfor kan tilnærmes med rasjonale tall.

Oppgaver

1. Bevis formel (2.2).
2. Bevis formel (2.4).
3. Vis at $A \setminus B = A \cap B^c$.
4. Anta at $f : A \to B$ er en funksjon. Vis at hvis $C, D \subset B$, så er $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ og $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
5. Anta at $f : A \to B$ er en funksjon. Vis at hvis $C, D \subset A$, så er $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$. Vis også at $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$. Finn et eksempel som viser at vi ikke alltid har $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.
6. Vis at hvis A, B er tellbare, så er $A \cup B$ tellbar.
7. Anta at mengdene $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ er tellbare. Bevis at $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ er tellbar. (Her består $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ av alle elementer som er med i minst én av mengdene $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Det kan for øvrig være lurt å kikke litt på beviset for setning 4.1.)
8. Vis at mengden av alle delmengder av $\mathbb{N}$ *ikke* er tellbar. (*Hint*: Prøv å tilpasse Cantors diagonalargument).