Analysedrypp III: ϵ-δ og alt det der

Mange strever med ϵ-δ-argumenter. Det er flere grunner til dette: Noen har problemer med å forstå den underliggende tankegangen, mens andre sliter med de grunnleggende regneteknikkene. De heldigste faller først av lasset når regnestykkene blir for kompliserte. I dette notatet skal jeg prøve å løse opp noen av flokene som folk kanskje har rotet seg inn i.

1 Tallverdier og normer

Én av tingene som gjør ϵ-δ-argumenter vanskelige, er at de involverer tallverdier og normer, typisk i uttrykk av typen $|x-a| < \delta$ eller $|\mathbf{F}(\mathbf{x})-\mathbf{F}(\mathbf{a})| < \epsilon$. Mange synes tallverdier og normer er litt ekle, men i ϵ-δ-sammenheng er de lette å tolke: *Du skal alltid tenke på $|x-a|$ som avstanden mellom x og a!* At $|x-a| < \epsilon$, betyr altså bare at avstanden mellom x og a er mindre enn ϵ. Er du på tallinjen og tenker på a som et fast tall mens x kan variere, betyr $|x-a| < \epsilon$ dermed at x ligger mellom $a-\epsilon$ og $a+\epsilon$. Akkurat det samme gjelder i $\mathbb{R}^n$: *Du skal alltid tenke på $|\mathbf{x}-\mathbf{a}|$ som avstanden mellom punktene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{a}$.* Tenker du på $\mathbf{a}$ som et fast punkt mens $\mathbf{x}$ kan variere, betyr altså $|\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \epsilon$ at $\mathbf{x}$ ligger innenfor kulen om $\mathbf{a}$ med radius ϵ. Legg for øvrig merke til at rekkefølgen av leddene ikke spiller noen rolle: $|\mathbf{x}-\mathbf{a}| = |\mathbf{a}-\mathbf{x}|$.

Når man arbeider med tallverdier og normer, er det viktig å kunne veksle mellom det geometriske bildet og de regnetekniske uttrykkene. I MAT1110 lærte du to ulikheter som hjelper deg med det regnetekniske:

Setning 1.1 (Trekantulikheten) *For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gjelder*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Trekantulikheten er viktig i mange argumenter fordi den tillater oss å bryte kompliserte uttrykk ned i enklere deler — vi kan kontrollere det sammensatte uttrykket $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ dersom vi kan kontrollere hver del $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Den neste ulikheten gir oss en tilsvarende kontroll over skalarprodukter.

Setning 1.2 (Schwartz' ulikhet) *For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gjelder*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Når a og b er tall, er Schwartz' ulikhet en likhet: Vi har

$$|ab| = |a||b| \qquad \text{når } a, b \in \mathbb{R}$$

Vi skal senere se hvordan vi kan bruke ulikheter i ϵ-δ-argumenter.

2 Konvergens av følger

Før vi går løs på ϵ-δ-argumenter for alvor, skal vi ta en titt på de litt enklere ϵ-N-argumentene som dukker opp når vi studerer konvergens av følger. La oss først gruble litt over hva vi er på jakt etter: Vi ønsker å fange ideen om at $a \in \mathbb{R}$ er grensen til følgen $\{x_n\}$ når n går mot uendelig. Intuitivt betyr det at vi kan få x_n så nær a vi måtte ønske (men ikke nødvendigvis helt lik!) ved å gå tilstrekkelig langt ut i følgen. Sagt på en litt annen måte: Dersom vi spesifiserer hvor nær vi ønsker at elementene i følgen skal være til a, må det finnes en N slik at kravet er oppfylt for alle leddene i følgen fra x_N og utover. Dersom spesifikasjonen vår er at avstanden mellom leddene og a skal være mindre enn ϵ, ender vi opp med denne definisjonen:

Definisjon 2.1 *Følgen $\{x_n\}$ i $\mathbb{R}$ konvergerer mot a dersom det til hver $\epsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|x_n - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$.*

Med litt andre ord krever definisjonen at x_n skal ligge mellom $a - \epsilon$ og $a + \epsilon$ når $n \geq N$.

Vi har akkurat samme definisjon for følger i $\mathbb{R}^n$:

Definisjon 2.2 *Følgen $\{\mathbf{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ konvergerer mot $\mathbf{a}$ dersom det til hver $\epsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| < \epsilon$ for alle $n \geq N$.*

Den "geometriske" tolkningen i dette tilfellet er at for $n \geq N$, skal $\mathbf{x}_n$ ligge inni kulen med sentrum i $\mathbf{a}$ og radius ϵ.

Legg merke til at definisjonene ovenfor sier at det for *alle* ϵ skal finnes en N som tilfredsstiller kravet. Denne N'en vil normalt avhenge av ϵ — jo mindre ϵ blir, dess større må vi vanligvis velge N (noen bøker skriver $N(\epsilon)$ for å markere at N avhenger av ϵ). Dersom vi ønsker å vise at følgen *ikke* konvergerer, er det nok å vise at det finnes én ϵ slik at uansett hvor stor vi velger N, så finnes det en $n \geq N$ slik at $|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| \geq \epsilon$.

Bemerkning: Noen liker å tenke på definisjonen ovenfor som et spill mellom to spillere, I og II. Spiller I ønsker å vise at følgen *ikke* konvergerer, mens spiller II ønsker å vise at den konvergerer. I hver runde i spillet velger spiller I først en ϵ, og deretter velger spiller II en N. Spiller II vinner runden dersom $|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}_n| < \epsilon$ for alle $n \geq N$, hvis ikke vinner spiller I.

Følgen $\{\mathbf{x}_n\}$ konvergerer dersom spiller II har en gevinststrategi i dette spillet — dvs. dersom hun uansett hvilken $\epsilon > 0$ spiller I måtte velge, kan svare med en N slik at $|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Følgen konvergerer *ikke* dersom spiller I har en gevinststrategi, dvs. dersom spiller I kan velge en ϵ som ikke kan "pareres" av noen N.

La oss se på et enkelt eksempel på hvordan trekantulikheten kan brukes til å vise konvergens av sammensatte uttrykk.

Setning 2.3 *Anta at* $\{\mathbf{x}_n\}$ *og* $\{\mathbf{y}_n\}$ *er to følger i* $\mathbb{R}^m$ *som konvergerer mot henholdsvis* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$. *Da konvergerer følgen* $\{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n\}$ *mot* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Bevis: Vi må vise at gitt en $\epsilon > 0$, kan vi alltid finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) - (\mathbf{a} - \mathbf{b})| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Vi starter med å samle de leddene som "hører sammen", og bruker deretter trekantulikheten:

$$|(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) - (\mathbf{a} - \mathbf{b})| = |(\mathbf{x}_n - \mathbf{a}) + (\mathbf{y}_n - \mathbf{b})| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| + |\mathbf{y}_n - \mathbf{b}|$$

Siden $\mathbf{x}_n$ konvergerer mot $\mathbf{a}$, vet vi at det finnes en $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| < \frac{\epsilon}{2}$ for alle $n \geq N_1$ (hvis du ikke skjønner dette, se bemerkningen nedenfor). Siden $\mathbf{y}_n$ konvergerer mot $\mathbf{b}$, kan vi tilsvarende finne en $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{y}_n - \mathbf{b}| < \frac{\epsilon}{2}$ for alle $n \geq N_1$. Setter vi $N = \max\{N_1, N_2\}$, ser vi at når $n \geq N$, så er

$$|(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) - (\mathbf{a} - \mathbf{b})| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| + |\mathbf{y}_n - \mathbf{b}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dermed er oppdraget utført, og setningen er bevist. □

Bemerkning: Mange blir forvirret av at $\frac{\epsilon}{2}$ plutselig dukker opp i beviset ovenfor og overtar rollen til ϵ: Vi finner en N_1 slik at $|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| < \frac{\epsilon}{2}$ for alle $n \geq N_1$! Det er imidlertid ikke noe galt i det; siden $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, kan vi takle en hvilken som helst "epsilon" vi blir utfordret med, også halvparten av den opprinnelige epsilon'en.

3 Kontinuitet

"Ekte" ϵ-δ-formuleringer dukker først opp i forbindelse med kontinuitet og grenser. La oss holde oss til kontinuitet:

Definisjon 3.1 *En funksjon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *er kontinuerlig i punktet* a *dersom det for hver* $\epsilon > 0$*, finnes en* $\delta > 0$ *slik at* $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ *når* $|x - a| < \delta$.

I denne definisjonen er det viktig ikke å gå seg vill i tallverdiene, men holde seg til vår "avstandsfilosofi": Definisjonen sier at uansett hvilken $\epsilon > 0$ vi blir gitt, så finnes det en $\delta > 0$ slik at når avstanden mellom x og a er mindre enn δ, så er avstanden mellom $f(x)$ og $f(a)$ mindre enn ϵ.

Akkurat som før kan vi tenke på definisjonen som et spill mellom to spillere; spiller I som ønsker å vise at funksjonen *ikke* er kontinuerlig i a, og spiller II som ønsker å vise at den *er* kontinuerlig i a. En runde i spillet foregår ved at spiller I velger en $\epsilon > 0$, og at spiller II svarer med en $\delta > 0$. Spiller II vinner runden dersom $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ for alle x slik at $|x - a| < \delta$, ellers vinner spiller I. Funksjonen er kontinuerlig dersom spiller II har en gevinststrategi; dvs. dersom hun uansett hvilken $\epsilon > 0$ spiller I velger, kan finne en $\delta > 0$ som vinner runden: dvs. som er slik at $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ når

$|x-a|<\delta$. Spiller II vinner dersom hun finner en ϵ som ikke kan pareres, dvs. dersom det uansett hvor liten δ spiller II velger, finnes tall x slik at $|x-a|<\delta$ og $|f(x)-f(a)|\geq\epsilon$. La oss for en gangs skyld se på et eksempel der spiller I vinner, dvs. der funksjonen f *ikke* er kontinuerlig.

Eksempel 1: La

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{hvis } x\leq 0 \\ \\ 2 & \text{hvis } x>0 \end{cases}$$

Intuitivt er denne funksjonen diskontinuerlig i 0 fordi den gjør et sprang der. Hvordan fanges dette opp av ϵ-δ-definisjonen? Vi ser at $f(0)=1$, men at det ligger punkter helt opptil 0 der funksjonsverdien er 2. Velger vi (nå i rollen til spiller I) en $\epsilon<1$, har spiller II ingen mulighet til å parere: Uansett hvor liten hun velger $\delta>0$, vil det finnes punkter x, $0<x<\delta$ der $f(x)=2$, og følgelig er $|f(x)-f(0)|=|2-1|=1>\epsilon$. Altså er f diskontinuerlig i 0.

La oss nå se på et litt mer sammensatt eksempel.

Setning 3.2 *Funksjonen* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *er kontinuerlig i* a *hvis og bare hvis* $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$ *for alle følger* $\{x_n\}$ *som konvergerer mot* a.

Bevis: Anta først at f er kontinuerlig i a, og at $\lim_{n\to\infty} x_n=a$. Vi må vise at $f(x_n)$ konvergerer mot $f(a)$. Gitt en $\epsilon>0$, må vi altså vise at det finnes en $N\in\mathbb{N}$ slik at $|f(x_n)-f(a)|<\epsilon$ når $n\geq N$. Siden f er kontinuerlig i a, finnes det en $\delta>0$ slik at $|f(x)-f(a)|<\epsilon$ når $|x-a|<\delta$. Men vi vet at x_n konvergerer mot a, og dermed finnes det en $N\in\mathbb{N}$ slik at $|x_n-a|<\delta$ når $n\geq N$ (legg merke til at δ nå spiller den rollen som ϵ pleier å ha, men det er ikke noe problem). Vi ser nå at dersom $n\geq N$, så er $|x_n-a|<\delta$, og dermed er $|f(x_n)-f(a)|<\epsilon$. Dermed har vi vist at $\{f(x_n)\}$ konvergerer mot $f(a)$.

Det gjenstår å vise at dersom f *ikke* er kontinuerlig i a, så finnes det minst én delfølge $\{x_n\}$ som konvergerer mot a uten at $\{f(x_n)\}$ konvergerer mot $f(a)$. Siden f ikke er kontinuerlig i a, finnes det en $\epsilon>0$ slik at uansett hvor liten vi velger $\delta>0$, så finnes det et punkt x slik at $|x-a|<\delta$, men $|f(x)-f(a)|\geq\epsilon$. Velger vi $\delta=\frac{1}{n}$, finnes det derfor et et punkt x_n slik at $|x_n-a|<\frac{1}{n}$, men $|f(x_n)-f(a)|\geq\epsilon$. Dermed konvergerer $\{x_n\}$ mot a, mens $\{f(x_n)\}$ *ikke* konvergerer mot $f(a)$ (fordi $f(x_n)$ alltid har avstand minst ϵ til $f(a)$). $\square$

Beviset ovenfor viser hvordan vi kan sette sammen ulike former av avhengighet. Legg spesielt merke til hvordan gamle størrelser dukker opp i nye roller — plutselig hadde δ den rollen som ϵ pleier å ha. Dette er uproblematisk så lenge vi husker på at navnet på en størrelse ikke spiller noen rolle; det vi vanligvis kaller ϵ, kunne likså godt ha hett a, b — eller δ. Grunnen til at vi forsøker å bruke samme navn på størrelser som har samme funksjon i ulike bevis, er at det forenkler tankearbeidet — vi slipper å bruke krefter på å huske hva symbolene står for.

La oss helt til slutt se litt på kontinuitet i $\mathbb{R}^n$. Definisjonen er den samme som før:

Definisjon 3.3 *En funksjon* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *er kontinuerlig i punktet* $\mathbf{a}$ *dersom det for hver* $\epsilon > 0$*, finnes en* $\delta > 0$ *slik at* $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \epsilon$ *når* $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$*.*

Lar vi $\mathrm{B}(\mathbf{c}, r)$ betegne (den åpne) kulen med sentrum i c og radius r, har definisjonen denne geometriske tolkningen: Hvis vi velger en kule $\mathrm{B}(\mathbf{F}(\mathbf{a}), \epsilon)$ med sentrum i $\mathbf{F}(\mathbf{a})$, så vil det uansett hvor liten radiusen ϵ er, finnes en kule $\mathrm{B}(\mathbf{a}, \delta)$ med sentrum i $\mathbf{a}$ som avbildes inn i $\mathrm{B}(\mathbf{F}(\mathbf{a}), \epsilon)$, dvs. slik at $\mathbf{x} \in \mathrm{B}(\mathbf{a}, \delta) \Longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathrm{B}(\mathbf{F}(\mathbf{a}), \epsilon)$.

4 Estimater og overslag

Det er viktig å være klar over at når vi gjennomfører et ϵ-δ-bevis, er vi bare på jakt etter én δ som gjør jobben, og det er en ikke noen vits å lete etter den beste/største δ'en som virker. Det betyr at vi ofte kan bruke overslag for å forenkle argumentene — vi sier ting som: "denne faktoren kan aldri bli større enn 10, og dermed holder det å velge δ lik $\frac{\epsilon}{10}$". Overslag er uvant for mange studenter og bidrar nok til ϵ-δ-bevis ofte virker vanskeligere enn de er. Her er et litt mer teoretisk eksempel på hvordan man går frem i et sammensatt ϵ-δ-argument. Jeg har prøvd å forklare hvordan man tenker underveis:

Setning 4.1 *Anta at* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *er kontinuerlig i punktet* a*, og at* $g(a) \neq 0$*. Da er funksjonen* $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ *er kontinuerlig i* a*.*

Bevis: Gitt en $\epsilon > 0$, må vi vise at det finnes en $\delta > 0$ slik at $|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}| < \epsilon$ når $|x - a| < \delta$.

La oss først skrive om uttrykket på en enklere form. Setter vi på felles brøkstrek, ser vi at

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|}$$

Siden $g(x) \to g(a)$, kan vi få telleren i dette uttrykket så liten vi måtte ønske ved å velge x nær nok a. Problemet er bare at dersom nevneren er liten, kan brøken likevel bli stor (husk at små nevnere, gir store brøker — vi er nødt til å tenke litt opp-ned her!) Den ene faktoren i nevneren, $|g(a)|$, har vi rimelig kontroll på siden den er konstant. Hva med den andre faktoren $|g(x)|$? Siden $g(x) \to g(a)$, kan heller ikke denne faktoren bli for liten; det må f.eks. finnes en $\delta_1 > 0$ slik at $g(x) > \frac{g(a)}{2}$ når $|x-a| < \delta_1$ (tenk nøye hva som foregår her — dette er egentlig et separat lite ϵ-δ-resonnement med $\epsilon = \frac{|g(a)|}{2}$). For alle x'er slik at $|x-a[< \delta_1$, er dermed

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a)-g(x)|}{|g(x)||g(a)|} < \frac{|g(a)-g(x)|}{\frac{|g(a)|}{2}|g(a)|} = \frac{2}{|g(a)|^2}|g(a)-g(x)|$$

Hvordan kan vi få dette uttrykket mindre enn ϵ? Vi trenger åpenbart å få $|g(a)-g(x)| < \frac{|g(a)|^2}{2}\epsilon$, og siden g er kontinuerlig i a, vet vi at det finnes en δ_2 slik at $|g(a)-g(x)| < \frac{|g(a)|^2}{2}\epsilon$ når $|x-a| < \delta_2$. Velger vi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, har vi dermed

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| \leq \frac{2}{|g(a)|^2}|g(a)-g(x)| < \frac{2}{|g(a)|^2}\frac{|g(a)|^2}{2}\epsilon = \epsilon$$

og beviset er fullført. □

Oppgaver

1. Vis at dersom følgen $\{x_n\}$ konvergerer mot a, så konvergerer følgen $\{Mx_n\}$ (der M er en konstant) mot M. Bruk definisjonen av konvergens og tenk nøye gjennom hvordan du finner N når ϵ er gitt.

2. Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at dersom funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i punktet a, så er funksjonen $g(x) = Mf(x)$, der M er en konstant. også kontinuerlig i a.

3. Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at dersom $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige i punktet a, så er $f + g$ det også.

4. Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at dersom $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige i punktet a, så er fg det også. (*Hint:* Skriv $|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |(f(x)g(x) - f(a)g(x)) + (f(a)g(x) - f(a)g(a))|$ og bruk trekantulikheten.)

5. Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ er kontinuerlig i alle punkter $a > 0$.

6. Bruk trekantulikheten til å vise at $|\,|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\,| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ for alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.