2/9-20

MAT1140

Potensmengder

Definisjon: Hvis A er en mengde, består potensmengden $\mathcal{P}(A)$ til A av alle delmengder av A (inkludert $\emptyset$ og A selv)

Eksempel: Hvis $A = \{a, b\}$, er

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

og hvis $A = \{a, b, c\}$, er

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Legg merke til at dersom A har 2 elementer, har $\mathcal{P}(A) = 4 = 2^2$ elementer, og når A har 3 elementer, har $\mathcal{P}(A) = 8 = 2^3$ elementer. Dette mønstret fortsetter oppover.

Teorem: Hvis A er en endelig mengde med n elementer, så har $\mathcal{P}(A)$ 2^n elementer.

Vi skal gi to bevis:

Bevis 1: La oss liste opp elementene i A: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Skriv opp en liste av n symboler som enten er 0 eller 1, f.eks

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \ldots\ldots \quad a_n$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots\ldots \quad 1$

Definér en delmengde $B \subset A$ ved å la $a_i \in B$ hvis og bare hvis det i-te symbolet er 1. Vi ser at det til hver delmengde B av korresponderer en sekvens av 0'er og 1'er, og at det åpenbart er like mange delmengder som det er sekvenser. Siden det er 2^n sekvenser (hvert av de n symbolene kan velges på 2 måter) finnes det også 2^n delmengder

Bevis 2: Vi bruker induksjon. Observer først at hvis en mengde har 0 elementer (altså er den tomme mengden), så er $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ som har $1 = 2^0$ elementer. La induksjonshypotesen være

$P(n)$: For enhver mengde A med n elementer har $\mathcal{P}(A)$ 2^n elementer

Siden $P(0)$ er sann, er det nok å vise at hvis $P(k)$ er sann for et tall $k \in \mathbb{N}$, så er $P(k+1)$ også sann.

La A være en mengde av $k+1$ elementer $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$. Da er $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ en mengde med k elementer som ifølge induksjonshypotesen har 2^k delmengder $B_1, B_2, \ldots, B_{2^k}$. Men da har A delmengdene

$B_1, B_2, \ldots, B_{2^k}$ $\qquad$ 2^k stykker

og

$B_1 \cup \{a_{k+1}\}, B_2 \cup \{a_{k+1}\}, \ldots, B_{2^k} \cup \{a_{k+1}\}$ $\qquad$ 2^k stykker

dvs $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ stykker.

Ser vi på delmengdene til $A = \{1, 2, 3\}$, ser vi de fordeler seg slik

$\emptyset$ - én delmengde med 0 elementer

$\{1\}, \{2\}, \{3\}$ - tre delmengder med 1 element

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ - —— " —— 2 elementer

$\{1,2,3\}$ - én delmengde med 3 —"—

Generelt har vi

<u>Teorem</u>: En mengde A med n elementer har nøyaktig

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}$$

elementer. Følgelig er

$$(*) \qquad 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

<u>Bevis</u>: Det finnes $\binom{n}{k}$ måter å plukke ut k elementer av n på, og dermed $\binom{n}{k}$ ~~mengder~~ delmengder med k elementer. Ctd

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

følger nå fra forrige resultat.

Bemerkning: Formelen $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ kan også bevises på en annen måte. Husk binomialformelen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Setter vi $a = b = 1$, får vi

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum \binom{n}{k}.$$

Ordnede par

All matematikk kan bygges opp ved hjelp av mengdebegrepet og alle matematiske objekter kan tolkes som mengder. Dette er ikke åpenbart – hvordan kan vi for eksempel oppfatte en funksjon som en mengde?

Vi skal ikke grave oss ned i denne problemstillingen her, men det er likevel nyttig å vite litt om den. Vi skal begynne enda litt mer elementært – med begrepet ordnet par. Intuitivt er et ordnet par bare et par (x, y) der rekkefølgen spiller en rolle – dvs at to ordnede par (x,y) og (u,v) er like hvis og bare hvis $x=u$ og $y=v$ (dvs $(1,2) \neq (2,1)$ – elementene er like, men rekkefølgen er forskjellig). Spørsmålet er hvordan vi kan formalisere et slikt begrep bare ved hjelp av mengder.

Definisjon: Det ordnede paret (a,b) er definert som $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

Denne definisjonen ser absurd ut, men den er formulert utelukkende ved hjelp av mengder. Følgende lemma viser at den gjør jobben den er satt til.

Lemma: Dersom $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$, er $a=c$ og $b=d$.

Bevis: Anta først at $a \neq b$. Da består $\{\{a\},\{a,b\}\}$ av én mengde med ett element og én mengde med to elementer, og siden $\{\{c\},\{c,d\}\}$ er samme mengden, må $c \neq d$. Siden de to ettpunktsmengdene $\{a\}$ og $\{c\}$ er like, må $a=c$, og siden to topunktsmengdene $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ også er like, må også $b=d$.

Anta så at $a=b$. Da er $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$, som bare består av ett element $\{a\}$. Da må også $\{\{c\},\{c,d\}\}$ bestå av bare ett element, og det er bare mulig hvis $c=d$ og $\{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{c\}\}$. Dermed har vi $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, så $b=a=c=d$. $\square$

Vi har nå vist at ordnede par kan formaliseres ved hjelp av mengder. Hva så med en funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Vi lar f være mengden av alle ordnede par $(x, f(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Vi skal komme tilbake til denne definisjonen senere.

Russels paradoks

Da mengdelæren først ble utviklet på slutten av attenhundretallet, trodde man at man kunne danne mengder helt uhemmet - nemlig at enhver fornuftig utseende definerte en mengde. Det er ikke så rart at det førte til selvmotsigelser - er det f.eks. rimelig at det finnes en mengde som består av alle mengder?

Den første som viste at uhemmet mengdekonstruksjon fører til selvmotsigelser, var den engelske filosofen og matematikeren Bertrand Russel (1872-1970). Russel betraktet mengden

$S = \{A : A$ er en mengde slik at $A \notin A\}$.

og spørr er S element i S eller ikke?

Anta $S \in S$, da er $S \notin S$
Anta $S \notin S$, da er $S \in S$
$\Big\}$ selvmotsigelse uansett.

Moderne mengdelære er bygget opp slik at slike paradokser ikke dukker opp. Man kan ikke lenger definere mengder uhemmet, og mengder som inneholder seg selv som element, finnes ikke lenger.

Disse presiseringene spiller som regel liten rolle for vanlig matematisk praksis. Her arbeider man som regel bare med delmengder av allerede etablerte mengder og da dukker ikke disse problemene opp.

Kartesiske produkter

Dersom A og B er to mengder, er det kartesiske produktet $A \times B$ definert ved

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

dvs $A \times B$ består av alle ordnede par (a,b) der $a \in A$ og $b \in B$.

Dersom $A = B$, skriver vi A^2 istedenfor $A \times A$.

<u>Eksempel</u>: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Vi kan utvide til flere faktorer:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$