MAT 1140

Kardinalitet

Vi tar med et tellbarhetstriks til

Setning: Anta at $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er en følge av tellbare mengder. Da er

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

også tellbar.

Bevis: Siden A_1 er tellbar finnes det en følge

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$$

som inneholder alle elementene i A_1. Tilsvarende har vi følger

$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots$$

$$a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

som inneholder alle elementene i A_2, A_3 osv. Dermed inneholder følgen

$$\underbrace{a_{11}}_{\text{sum } 1}, \underbrace{a_{12}, a_{21}}_{\text{sum } 2}, \underbrace{a_{13}, a_{22}, a_{31}}_{\text{sum } 3}, \underbrace{a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}}_{\text{sum } 4}, \dots$$

alle elementer i B, og følgelig er B tellbar.

Det er på tide å se på mengder som ikke er tellbare.

<u>Teorem</u>: Mengden $\mathbb{R}$ av alle reelle tall er ikke tellbar.

<u>Bevis</u>: Vi skal bruke at ethvert reelt tall har en desimalutvikling

$$a, d_1 d_2 d_3, \ldots$$

der $a \in \mathbb{N}$ og $d_1, d_2, d_3, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ er desimalene.
Anta for motsigelse at $\mathbb{R}$ er tellbar. Da finnes det en følge $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ av alle reelle tall. Skriver vi dem på desimalform, får vi

$$\begin{aligned}
r_1 &= a_1, d_{11} d_{12} d_{13} \ldots d_{1n} \ldots \\
r_2 &= a_2, d_{21} d_{22} d_{23} \ldots d_{2n} \ldots \\
r_3 &= a_3, d_{31} d_{32} d_{33} \ldots d_{3n} \ldots \\
&\vdots \\
r_n &= a_n, d_{n1} d_{n2} d_{n3} \ldots d_{n,n} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vi danner nå et nytt reelt tall

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$$

ved

$$b_n = \begin{cases} 1 \text{ hvis } d_{nn} \neq 1 \\ 2 \text{ hvis } d_{nn} = 1 \end{cases}$$

Da er $b \neq r_n$ siden b og r_n er forskjellige i n-te desimal (siden alle desimalene i b er 1 eller 2, er det ikke noe problem at enkelte tall har to forskjellige desimalutviklinger, f. eks. 0.999... og 1.000...). Altså er b et reelt tall som ikke er på listen $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Dette er en selvmotsigelse siden ~~listen~~ denne listen per antagelse inneholder alle reelle tall.

Schröder-Bernsteins teorem

Når vi nå vet at det finnes mengder som ikke er likemektige, gir det mening å prøve å bevise.

Schröder-Bernsteins teorem: Anta at card $A \leq$ card B og card $B \leq$ card A. Da er card $A =$ card B. Sagt med andre ord: Dersom det finnes injektive funksjoner $f: A \to B$ og $g: B \to A$, så finnes det en bijeksjon $h: A \to B$.

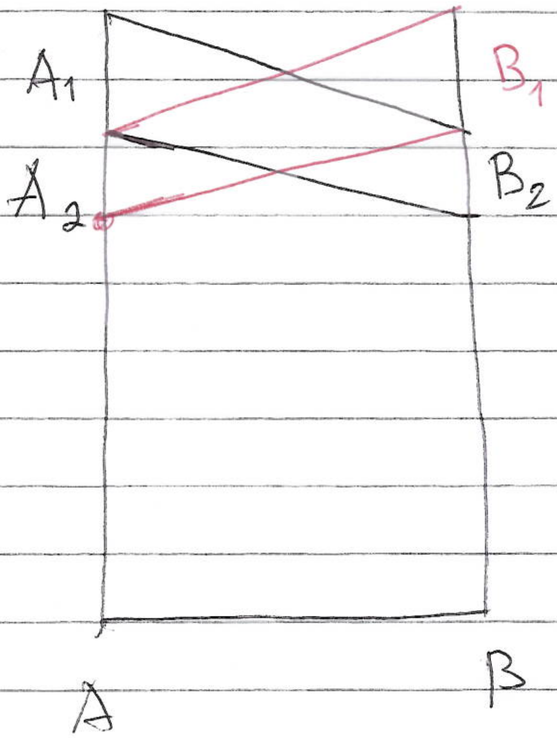
Bevis: Dette er et langt og komplisert bevis, og vi skal forsøke å ta beviset i stadier.

Vi skal arbeide med delmengder

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\infty$ av A

$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_\infty$ av B

Vi definerer først $B_1 = B \setminus f(A)$, $A_1 = A \setminus g(B)$ og deretter $B_2 = f(A_1)$, $A_2 = g(B_1)$.

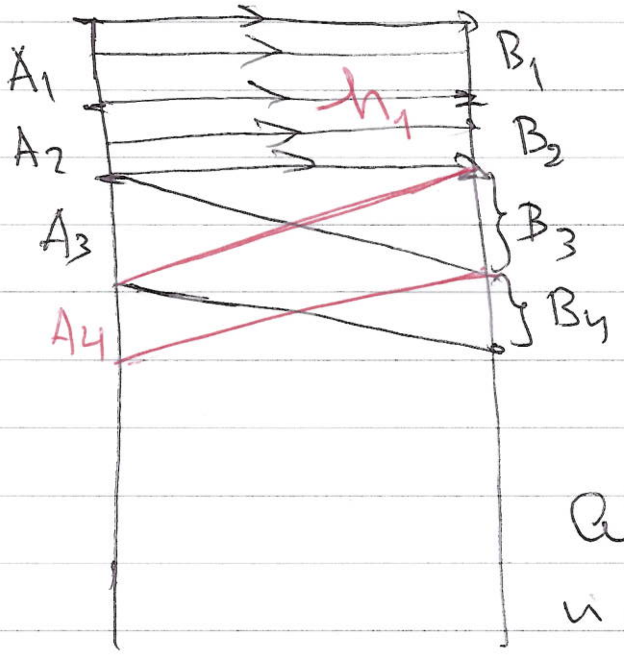


Det neste skrittet er å definere en funksjon $h_1 : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ ved

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{hvis } x \in A_2 \end{cases}$$

Observer at h_1 er en bijeksjon, og at f avbilder $A \setminus (A_1 \cup A_2)$ injektivt inn i $B \setminus (B_1 \cup B_2)$. Tilsvarende avbilder g $B \setminus (B_1 \cup B_2)$ injektivt inn i $A \setminus (A_1 \cup A_2)$.

Vi har dermed situasjonen på neste side



Vi har

$$B_3 = B \setminus (B_1 \cup B_2) \setminus f(A \setminus (A_1 \cup A_2))$$

$$A_3 = A \setminus (A_1 \cup A_3) \setminus g(B \setminus (B_1 \cup B_2))$$

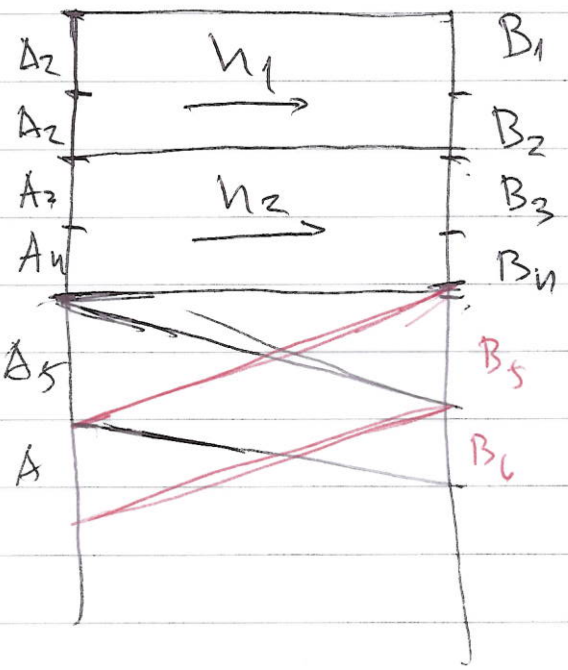
$$A_4 = g(B_3), \quad B_4 = f(A_3)$$

Akkurat som istad kan vi definere en funksjon

$h_2 : A_3 \cup A_4 \to B_2 \cup B_3$ ved

$$h_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } x \in A_3 \\ g^{-1}(x) & \text{hvis } x \in A_4 \end{cases}$$

Vi har dermed dette bildet og kan definere en funksjon



$h_3 \; A_5 \cup A_6 \to B_5 \cup B_6$

som tidligere.

Fortsetter vi på denne måten, får vi sekvensen av disjunkte mengder

$A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots \subset A$

$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots \subset B$

og bijeksjonen $h_i: A_{2i-1} \cup A_{2i} \to B_{2i-1} \cup B_{2i}$
Vi har dermed en bijeksjon

$$\hat{h}: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \to \bigcup B_n$$

definert ved $\hat{h}(x) = h_i(x)$ når $x \in A_{2i-1} \cup A_{2i}$.
La nå $A_\infty = A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $B_\infty = B \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Vi skal vise at f er en bijeksjon mellom A_∞ og B_∞

Anta først at $x \in A_\infty$. Da kan ikke $f(x) \in B_i$ siden $B_i = f(A_{i-1})$ og f er injektiv. Dette betyr at $f(x) \in B_\infty$.
Plukk nå $y \in B_\infty$. Siden $B_\infty \subseteq f(A)$, finnes det en $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Siden $f(A_i) = B_{i+1}$ kan ikke $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, og dermed er $x \in A_\infty$. Siden f er injektiv, er f en bijeksjon mellom A_∞ og B_∞.
Vi kan nå definere $h: A \to B$.

$$h(x) = \begin{cases} \hat{h}(x) & \text{hvis } x \in \bigcup A_n \\ f(x) & \text{hvis } x \in A_\infty. \end{cases}$$

Det følger fra def vi allerede har gjort at h er en bijeksjon.

Det gjenstår ett naturlig spørsmål om kardinalitet. Hvis vi har to mengder A og B, er det da nødvendigvis slik at

card A ≤ card B eller card B ≤ card A,

eller kan vi ha mengder av ikke-sammenlignbar størrelse?

Dersom vi antar et aksiom som kalles utvalgsaksiomet, viser det seg at alle kardinaliteter er sammenlignbare, og at vi derfor alltid har

card A ≤ card B eller card B ≤ card A.

Utvalgsaksiomet sier at dersom $\{A_i\}_{i \in I}$ er en familie ikke-tomme mengder, finnes det en funksjon $f: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ slik at $f(i) \in A_i$. Det går altså an å velge ut ett element $a_i = f(i)$ fra hver mengde A_i. Dette kan se opplagt ut, men det har konsekvenser som noen synes er kontra-intuitive.

Vi har sett to typer uendelige mengder, $\mathbb{R}$ og de tellbare, og et naturlig spørsmål er om det ligger noen kardinalitet mellom dem, dvs finnes det mengder slik at

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) < \mathrm{card}(C) < \mathrm{card}(\mathbb{R}).$$

Kontinuumshypotesen sier at dette ikke er tilfellet, dvs at det ikke finnes noen kardinalitet mellom card($\mathbb{N}$) og card($\mathbb{R}$).

Det er bevist at denne hypotesen hverken kan bevises eller motbevises innenfor den mengdelæren vi har i dag.