5/9 - 2013

MAT 1140

Relasjoner

Anta at A og B er ikke-tomme mengder. Uformelt er en relasjon mellom A og B en forbindelse mellom visse elementer i A og visse elementer i B. Er A en samling mennesker og B en samling bøker, kan relasjonen f.eks være at A har lest B. Formelt definerer vi en relasjon R over A og B til å være en delmengde av $A \times B$. Dersom $(a,b) \in R$, sier vi at a står i relasjon R til b og skriver aRb. Vanlige betegnelser på relasjoner er $\sim$ og $\equiv$.

Eksempel: a) Vi kan tenke på $\leq$ som en relasjon på $\mathbb{R}$ (og $\mathbb{R}$):

$$\leq = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \leq b\}$$

b) For enhver mengde A er $\subseteq$ en relasjon på $\mathcal{P}(A)$:

$$\subseteq = \{(C,D) : C \subseteq D\}$$

c) At n er delelig med m (i symboler $m \mid n$) er en relasjon på $\mathbb{Z}$:

$$\mid = \{(m,n) : m \mid n\}$$

d) For alle mengder M er $\in$ en relasjon på M og $\mathcal{P}(M)$

$$\in \; = \{(x, A) : x \in A\}$$

De relasjonene som brukes i praksis, er ikke tilfeldige delmengder av $A \times B$, men gjenspeiler sider av det uformelle relasjonsbegrepet. Noen viktige egenskaper som ofte dukker opp, er:

1. Refleksivitet: En relasjon R på A er refleksiv dersom xRx for alle $x \in R$

2. Symmetri: En relasjon R på A er symmetrisk dersom xRy medfører yRx

3. Antisymmetri: En relasjon R på A er antisymmetrisk dersom xRy og yRx medfører at $x=y$

4. Transitivitet: En relasjon R på A er transitiv dersom xRy og yRz medfører xRz.

Det er instruktivt å sjekke egenskapene til noen uformelle relasjoner mellom mennesker, f. eks. "x er minst like höy som y", "x og y er helsösken," "x og y er halvsösken". Det er også instruktivt å se på egenskapene til de mer formelle relasjonene i eksemplet.

Ordningsrelasjoner

En viktig type relasjoner er ordningene. Vi begynner med den svakeste typen.

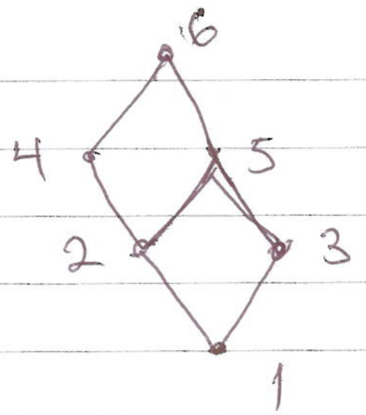
<u>Definisjon</u>: En relasjon R på en mengde A kalles en <u>partiell ordning</u> dersom den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv, dvs
(i) xRx for alle $x \in A$
(ii) xRy og yRx medfører $x = y$
(iii) Hvis xRy og yRz, så xRz.

Partielle ordninger markeres ofte med symboler som $\leq$ eller $\preceq$.

<u>Eksempler</u>: (i) $\mathbb{R}$ med vanlig ordning $\leq$ er en partiell ordning
(ii) $\mathcal{P}(M)$ med relasjonen $\subseteq$ er en partiell ordnin
(iii) Mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ med relasjonen

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,6), (5,6)\}$$

er en partiell ordning som kan representeres slik



aRb dersom det er mulig å følge en sti <u>oppover</u> fra a til b.

Mange av de ordningene vi er mest vant til, har en fjerde egenskap i tillegg til de tre ovenfor, nemlig at

(iv) for alle $x, y \in A$ er enten xRy eller yRx (eller begge hvis $x=y$).

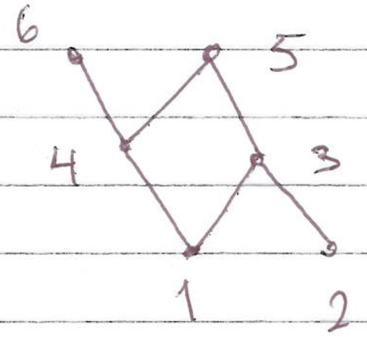
En partiell ordning som tilfredsstiller (iv) kalles en <u>total</u> <u>ordning</u>. Ordningen på figuren øverst på siden er <u>ikke</u> total siden vi hverken har 2R3 eller 3R2 (og heller ikke 4R5 eller 5R4). Den vanlige ordningen $\leq$ på $\mathbb{R}$ <u>er</u> en total ordning, men har A mer enn ett element, ~~[illegible]~~ er relasjonen $\subseteq$ på $\mathcal{P}(A)$ ikke total.

I partielle ordninger er det noen distinksjoner det er viktig å være klar over.

<u>Definisjon</u>: x er et <u>maksimalt</u> element i den partielle ordningen R dersom det <u>ikke</u> finnes

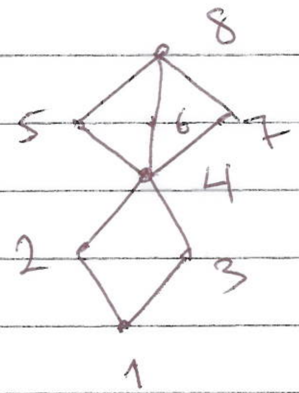
noe element $y \neq x$ slik at xRy. Tilsvarende kalles z et <u>minimalt</u> element dersom det ikke finnes noen $y \neq z$ slik yRz.

I denne ordningen er 5 og 6 maksimale elementer mens 1 og 2 er minimale elementer.



<u>Definisjon:</u> x er et <u>største</u> element for den partielle ordning R dersom yRx for alle y. Tilsvarende er z et <u>minste</u> element dersom zRy for alle y.

I eksemplet rett ovenfor finnes det hverken største eller minste elementer – til tross for at det finnes maksimale og minimale elementer. I ordningen nedenfor er 8 et største element og 1 et minste element.



Ordningen behøver ikke å ha største og minste elementer (tenk på $\leq$ på $\mathbb{R}$), og de kan naturligvis ikke ha mer enn ett av hver type)

Setning: En partiell ordning kan ha høyst ett største og ett minste element.

Bevis: Anta at x, y er to største elementer. Da er xRy og yRx, og følgelig $x=y$ ved antisymmetri. Tilsvarende argument gjelder for minste elementer.

Litt orden er det tross alt.

Setning: Ethvert største element er maksimalt og ethvert minste element er minimalt.

Bevis: Vi argumenterer kontrapositivt. Anta at x ikke er maksimalt. Da finnes det en $y \neq x$ slik at xRy. Da kan ikke yRx siden det ville medføre $y=x$, og følgelig er ikke x et største element. Et tilsvarende argument fungerer for det andre tilfellet.

Med totale ordninger er det enklere.

Setning: I en total ordning er alle maksimale elementer også største elementer og alle minimale elementer er også minste elementer.

Bevis: Anta at x er maksimalt. For enhver $y \neq x$ har vi da ikke xRy, og siden ordningen er total, må vi ha yRx. Dette betyr at x er et største element. Beviset for minimale elementer er helt tilsvarende.

Anta R er en partiell ordning på A og at $B \subseteq A$. Vi sier at B er *begrenset* *oppad* dersom det finnes en $a \in A$ slik at bRa for alle $b \in B$, og i så fall kalles a en *øvre skranke* for B. En øvre skranke som er mindre enn alle andre øvre skranker, kalles en *minste øvre skranke*. *Nedad begrenset*, *nedre skranker* og *største nedre skranke* er definert tilsvarende.

Vi sier at en partiell ordning har *minste øvre skranke-egenskapen* dersom enhver begrenset delmengde av A har en minste øvre skranke.

Eksempel: Anta at A er ikke-tom mengde og at $\subseteq$ er den vanlige ordningen på $\mathcal{P}(A)$. For enhver $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(A)$ er da

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \quad \text{minste øvre skranke}$$

og

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \quad \text{største nedre skranke}$$

for $\mathcal{B}$.