7/11-2013

MAT1140

Utvalgsaksiomet

Vi skal nå se på et mengdeteoretisk prinsipp av mer avansert karakter. Det kan ikke utledes fra de prinsippene vi hittil har sett på, men må formuleres som et eget aksiom.

<u>Utvalgsaksiomet:</u> Anta at $\mathcal{A}$ er en familie av ikke-tomme mengder. Da finnes det en funksjon $u: \mathcal{A} \to \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ slik at $u(A) \in A$ for alle $A \in \mathcal{A}$.

Vi kaller u en <u>utvalgsfunksjon</u> siden den velger ut et element $u(A) \in A$ for hver $A \in \mathcal{A}$.

Utvalgsaksiomet omdiskutert av to grunner:

1. Det ikke-konstruktivt – det sier at det finnes en utvalgsfunksjon u ~~uten~~ uten å gi anvisninger for hvordan en slik funksjon kan konstrueres.

2. Det har en del kontraintuitive konsekvenser som Banach-Tarskis paradoks. Den bruker utvalgsaksiomet til å dele en kule i

endelig mange deler som så settes sammen til to nye kuler med samme radius som den opprinnelige.

Til tross for disse innvendingene aksepterer de fleste matematikere utvalgsaksiomet. Det er bevist at aksiomet ikke leder til selvmotsigelser — dersom resten av mengdelæren er selvmotsigelsesfri, så er mengdelæren med utvalgsaksiomet også selvmotsigelsesfri.

I praksis brukes utvalgsaksiomet ikke i sin opprinnelig form, men gjennom noen av de konsekvensene det har. Den nyttigste av disse konsekvensene er Zorns Lemma som handler om maksimale elementer i partielle ordning. Først litt terminologi:

Definisjon: Anta at $\leq$ er en partiell ordning på en mengde X. En kjede er et total ordnet delmengde C av X (dvs at hvis c_1 og c_2 er elementer i C, så er enten $c_1 < c_2$, $c_1 = c_2$ eller $c_1 > c_2$).

Zorns Lemma: Anta at $\leq$ er en partiell ordning på en mengde X slik at enhver kjede i X har en øvre skranke. Da har $(X, \leq)$ et maksimalt element.

I anvendelsen av Zorns lemma er X ofte en familie av mengder og ordningen er inklusjon $\subseteq$. Ofte fungerer Zorns lemma som en slags induksjon for uendelige mengder.

Vi skal se på et eksempel på bruken av Zorns lemma. Det er viktig å huske på at en relasjon (f.eks. en partiell ordning) på en mengde X egentlig er en delmengde av $X \times X$.

Teoremet vi skal vise, sier at enhver partiell ordning kan forfines til en total ordning. For enhver partiell ordning $\preceq$ på en mengde X finnes det altså en total ordning $\leq$ på X slik at

$$x \preceq y \Rightarrow x \leq y.$$

Mengdeteoretisk betyr dette at $\preceq \subseteq \leq$.

Før vi går løs på teoremet, trenger vi et par lemmaer.

<u>Lemma</u>: Anta at $\leq$ er en partiell ordning på X og at $x, y \in X$ ikke er sammenlignbare. Da finnes det en finere partiell ordning $\leq_1$ på X der $x < y$ (at $\leq_1$ er <u>finere</u> enn $\leq$, betyr som vanlig at $\leq \subseteq \leq_1$).

<u>Bevis</u>: Vi utvider $\leq$ ved å legge til ulikhetene

$u \leq_1 v$ dersom $u \leq x$ og $y \leq v$. Formelt er altså

$\leq_1 = \leq \cup \{(u,v) : u \leq x \text{ og } y \leq v\}$

La oss sjekke at dette er en partiell ordning

1 Refleksivitet: Siden $u \leq u$, er åpenbart $u \leq_1 u$

2: Antisymmetri: Vi må sjekke de ulike mulighetene.

a) Hvis $\cancel{u} \leq v$ og $v \leq u$, vet vi at $u = v$

b) Hvis $u \leq v$ og $\cancel{v} \leq x$, $y \leq \cancel{u}$, må $u = v$. Hvis ikke, er nemlig $u < v$, som gir $y \leq u < v \leq x$, dvs $y < x$. Dette strider mot antagelsen om at x og y ikke er sammenlignbare

c) Hvis $u \leq x$ og $y \leq \cancel{v}$ og i tillegg $v \leq x$, $y \leq u$, så får vi $y \leq u \leq x$ og dermed er $y \leq x$ i strid med forutsetningene. Denne situasjonen oppstår dermed ikke

3 Transitivitet: Igjen må vi sjekke alle mulighetene

a) Hvis $u \leq v$ og $v \leq w$, så vet vi at $u \leq w$.

b) Hvis $u \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq w$, så er $u \leq x$, $y \leq w$ og dermed $u \leq_1 w$.

c) Hvis $u \leq x$, $y \leq v$ og $v \leq w$, så er $u \leq x$, $y \leq w$ og dermed $u \leq_1 w$.

d) Hvis $\cancel{u} \leq x$ og $y \leq v$ samt $v \leq \cancel{x}$ og $y \leq w$, så er $y \leq \cancel{v} \leq x$, så denne situasjonen oppstår aldri

<u>Lemma</u>: Anta at C er en kjede av partielle ordninger. Da er $R = \bigcup_{\leq \in C} \leq$ en partiell ordning.

<u>Bevis</u>: Vi ser at

$x R y \Leftrightarrow$ det finnes en $\leq \in C$ slik at $x \leq y$.

Vi sjekker kravene til en partiell ordning

1. <u>Refleksivitet</u>: $x \leq x$ for alle $\leq \in C$, så xRy.

2. <u>Antisymmetri</u>: Anta at xRy og yRx. Da finnes det $\leq_1, \leq_2 \in C$ slik at $x \leq_1 y$ og $y \leq_2 x$. Siden C er en kjede, er en av relasjonene $\leq_1, \leq_2$ finere enn den andre, la oss si at $\leq_2$ er den fineste. Da har vi $x \leq_2 y$ i tillegg til $y \leq_2 x$, og dermed er $x = y$.

3. <u>Transitivitet</u>: Anta at xRy og yRz. Da finnes det $\leq_1, \leq_2$ i C slik at $x \leq_1 y$ og $y \leq_2 z$. Siden C er en kjede, er den ene av ordningene $\leq_1, \leq_2$ finere enn den andre. Kall denne $\leq$. Da er $x \leq y$ og $y \leq z$, og følgelig $x \leq z$. Dermed er xRz.

Vi er nå klar til å bruke Zorns lemma til å vise hovedresultatet.

<u>Teorem</u>: Anta at $\preceq$ er en partiell ordning

på en mengde X. Da finnes det en total ordning som er en forfining av $\leq$.

<u>Bevis:</u> La $\mathcal{T}$ være samling av alle ordninger som er finere enn $\leq$ (vi krever ikke at de skal være ekte finere, så $\leq \in \mathcal{T}$). Vi ordner $\mathcal{T}$ ved inklusjon $\subseteq$ (husk at $\leq_1$ er finere enn $\leq_2$ dersom $\leq_2 \subseteq \leq_1$)

Anta C er en kjede i $(\mathcal{T}, \subseteq)$. Da vet vi at $\bigcup_{\leq \in \mathcal{C}} \leq$ er en partiell ordning på X,

og den ligger åpenbart i $\mathcal{T}$ og er en øvre skranke for C. Siden alle kjeder har en øvre skranke, har $\mathcal{T}$ et maksimalt element $\leq$. Vi må vise at $\leq$ er en total ordning.

Anta ikke, da har $\leq$ to ikke sammenlignbare elementer x, y. Vi har sett at vi kan utvide $\leq$ til en ordning der $x < y$. Dermed er ikke $\leq$ total, og det er en selvmotsigelse