8/9-2013

MAT 1140

Mer om partielle ordninger

Husk: Dersom $\leq$ er en partiell ordning på A og $B \subset A$, så kalles a en øvre ~~grense~~ skranke for B dersom $b \leq a$ for alle $b \in B$. Vi sier at a er en minste øvre skranke for B dersom $a \leq c$ for alle andre øvre skranker c.

Lemma: En mengde B kan ha høyst én minste øvre skranke.

Bevis: Anta at a_1 og a_2 er to minste øvre skranker for B. Siden a_1 er en minste øvre skranke, er $a_1 \leq a_2$, og siden a_2 er en minste øvre skranke, er $a_2 \leq a_1$. Ved antisymmetri er dermed $a_1 = a_2$, og det betyr at vi aldri kan ha mer enn én minste øvre skranke.

En ordning $\leq$ på A har den minste øvre skranke-egenskapen dersom enhver ikke-tom oppad begrenset delmengde av A har en minste øvre skranke. Helt tilsvarende sier vi at A har den største nedre skranke-egenskapen dersom enhver ikke-tom nedad begrenset mengde har en største nedre skranke.

Litt overraskende har vi:

Teorem: En ordning med den minste övre skranke-egenskapen har også den största nedre skranke-egenskapen.

Bevis: Anta at B er nedad begrenset. Vi må vise at B har en største nedre skranke. La

$$C = \{c \in A : c \text{ er en nedre skranke for } B\}$$

Denne mengden er ikke-tom siden B er nedad begrenset, og den er begrenset siden enhver $b \in B$ er en övre skranke for C. Dette betyr at C har en minste övre skranke d. Vi skal vise at d er en största nedre skranke for B.

Siden enhver $b \in B$ er en övre skranke for C, får vi automatisk at $d \leq b$, og fölgelig er d en nedre skranke. Hvis c er en annen nedre skranke for B, er $c \in C$ og dermed $c \leq d$. Dette viser at d er den största nedre skranken.

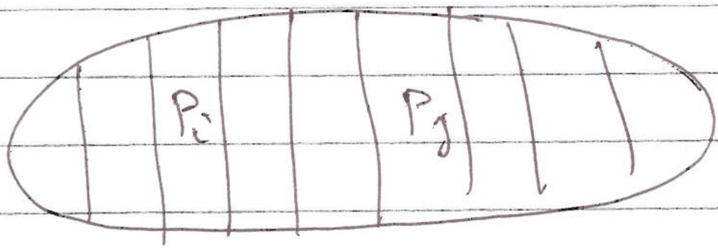
Ekvivalensrelasjoner

Anta at A er en mengde. En partisjon $\mathcal{P}$ av A er bare en samling $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in I}$ av delmengder av A slik at

(i) $A = \bigcup_{i \in I} P_i$

(ii) $P_i \cap P_j = \emptyset$ hvis $i \neq j$.

$\mathcal{P}$ er rett og slett en oppdeling av A inn i "avdelinger" P_i:



Vi kan nå definere en relasjon $\sim$ ved

$x \sim y \iff x$ og y hører med til den samme partisjonsklasse P_i

Eksempler: a) Inndeling av elever i klasser.
b) Inndeling av heltall i odde og like.
c) Inndeling av linjer i de som er parallelle med hverandre.

La oss se på hvilke egenskaper $\sim$ vil ha:

(i) $x \sim x$: refleksiv

(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ symmetri

(iii) Hvis $x \sim y$ og $y \sim z$, så er $x \sim z$ (transitiv)

Vi snur nå situasjonen på hodet og definerer:

<u>Definisjon</u>: En <u>ekvivalensrelasjon</u> på A er en relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Målet er å vise at alle ekvivalensrelasjoner kommer fra partisjoner. Vi begynner med å definere ekvivalensklasser.

<u>Definisjon</u>: Hvis $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på A, så er ekvivalensklassen til $x \in A$ gitt ved

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

<u>Setning</u>: Anta at $x, y \in A$. Da er enten $[x] = [y]$ eller $[x] \cap [y] = \emptyset$.

<u>Bevis</u>: Det holder å vise at hvis $[x]$ og $[y]$ har et felles element z, så er $[x] = [y]$. Observer først at siden $z \in [x]$, så er $x \sim z$, og siden $z \in [y]$, er $y \sim z$. Ved symmetri er også $z \sim x$ og $z \sim y$.

Anta $u \in [x]$. Da er $x \sim u$. Siden $z \sim x$, er $z \sim u$ ved transitivitet, og siden $y \sim z$, er $y \sim u$ også ved transitivitet. Dette viser at $u \in [y]$, og følgelig er $[x] \subset [y]$. Ved å bytte om rollene til x og y, viser vi tilsvarende at $[y] \subset [x]$, og følgelig er $[x] = [y]$.

Legg merke til at siden $x \sim x$ (refleksivitet) er $x \in [x]$, og dermed hører alle $x \in A$ til i en ekvivalensklasse.

Teorem: $\mathcal{P}_\sim = \{[x] : x \in A\}$ er en partisjon av A (observer at mange av ekvivalensklassene er de samme, men det spiller ingen rolle)

Bevis: Vi har allerede vist at ekvivalensklasser er disjunkte og dekker A.

Bemerkning: Det er lett å sjekke at at ekvivalensrelasjon generert av $\mathcal{P}_\sim$ er den opprinnelige relasjonen $\sim$.

Det viktige her er at vi kan bruke ekvivalensklasser til å definere partisjoner på en effektiv måte.

Eksempel: Anta at $n \in \mathbb{N}$. Definer en relasjon på $\mathbb{Z}$ ved

$$x \sim y \iff x - y \text{ er delelig på } n.$$

Sjekker at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon:

Refleksivitet: $x-x$ er delelig med n

Symmetri: Hvis $x-y$ er delelig med n, så er $y-x$ også delelig med n.

Transitivitet: Hvis $x-y$ er delelig med n, finnes det en $m \in \mathbb{Z}$ slik at $x-y = mn$. Hvis $y-z$ er delelig med n, finnes det en $k \in \mathbb{Z}$ slik at $y-z = kn$. Dermed er

$$x-z = x-y+y-z = mn+kn = (m+k)n$$

som viser at $x-z$ er delelig med n.

Hva er ekvivalensklassene?

$$[0], [1], [2], \ldots, [n-1].$$

Eksempel: $A = \{f : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$f \sim g \Leftrightarrow f-g$ er kontinuerlig

(i) Refleksivitet: $f-f = 0$ er kontinuerlig
(ii) Symmetri: Hvis $f-g$ er kont., så er $g-f = -(f-g)$ det også
(iii) Transitivitet: Hvis $f-g$ og $g-h$ er kont., så er

$f-h = (f-g)+(g-h)$ det også