10/9 - 2013

MAT 1140

Mer om ekvivalensrelasjoner

Eksempel: Anta $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Definer en relasjon $\equiv$ på $\mathbb{Z}$ ved

$$x \equiv y \iff x-y \text{ er delelig med } n$$

Viser at $\equiv$ er en ekvivalensrelasjon

(i) Refleksiv: $x \equiv x$ siden $x-x=0$ er delelig med n
(ii) Symmetri: Anta $x \equiv y$. Da er $x-y$ delelig med n, og følgelig er $y-x=-(x-y)$ delelig med n; dvs. $y \equiv x$.
(iii) Transitivitet: Anta at $x \equiv y$ og $y \equiv z$. Da $x-y$ og $y-z$ delelige med n; dvs. det finnes tall m og k slik at $x-y=mn$ og $y-z=kn$. Dermed er

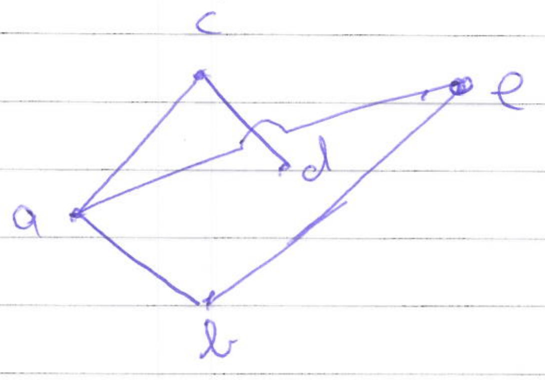
$$x-z = x-y+y-z = mn+kn = (m+k)n$$

som viser at $x \equiv z$.

Ekvivalensklassene til $\equiv$ er: $[0], [1], \ldots, [n-1]$

Grafer

Uformelt består en graf av punkter bundet sammen med kanter



Punkter: $\{a,b,c,d,e\}$

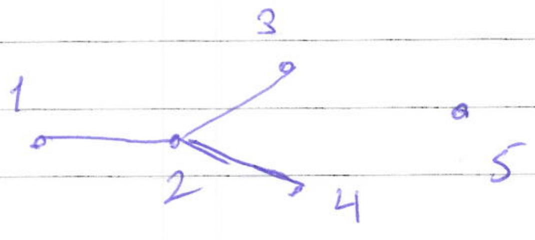
Kanter: $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,e\}$
$\{b,e\}, \{c,d\}$

"Punktene" i en graf kalles <u>noder</u> eller <u>hjørner</u>. Her er den formelle definisjonen

<u>Definisjon</u>: En <u>graf</u> er et par (V,E) der V er en ikke-tom endelig mengde og E er en samling av delmengder av V med to (ulike) elementer hver. Punktene i V kalles <u>noder</u> eller <u>hjørner</u> og parene i E kalles <u>kanter</u>

Vi illustrerer grafer gjennom figurer som ovenfor.

<u>Eksempel</u>: La $V = \{1,2,3,4,5\}$ og
$E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$

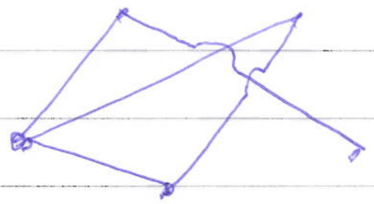


Det er mange eksempler på grafer:

1 Enhver symmetrisk, ~~[illegible]~~ anti-refleksiv relasjon på V definerer en graf ved

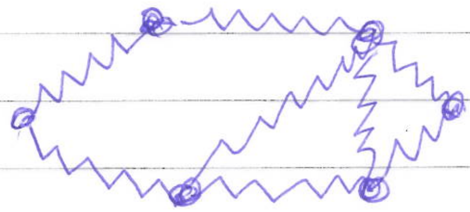
$$\{x,y\} \in E \iff xRy$$

2 Rutenett:

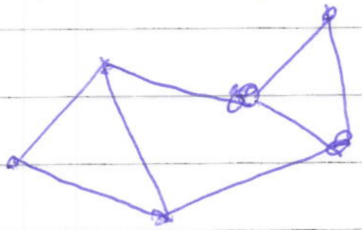


Byer og flyruter

3 Elektriske nettverk:



4 Bekjentskap (x kjenner y)



Definisjon: En tur i en graf er en sekvens av alternerende noder og kanter slik at kantene forbinder nodene de ligger mellom

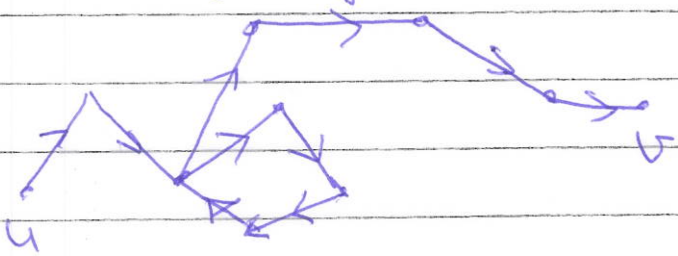
$$v_1, \{v_1,v_2\}, v_2, \{v_2,v_3\}, v_3, \ldots, v_{n-1}, \{v_{n-1},v_n\}, v_n$$

Vi skriver kortere

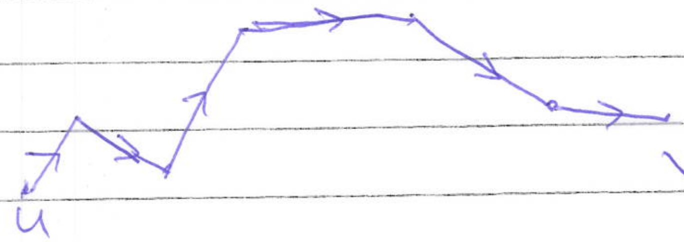
$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_{n-1} \to v_n$$

En sti fra u til v er en tur som begynner i u og ender i v og som ikke går innom noe hjørne mer enn én gang

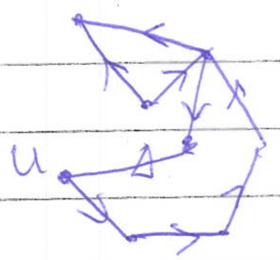
En sykel er tur som starter og ender i samme punkt u og som ikke er innom noe annet punkt enn u mer enn én gang.



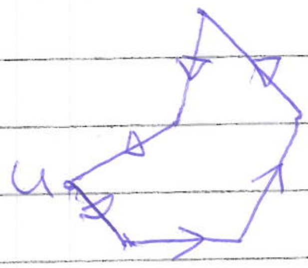
en tur, men ikke sti, fra u til v



en sti (og tur) fra u til v.



en sti (men ikke sykel) fra u til u



en sykel fra u til u

Setning: Anta at u og v er to ulike noder i en graf. Da finnes det en sti fra u til v hvis og bare hvis det finnes en tur fra u til v.

Bevis: Siden enhver sti er en tur, er den ene retningen opplagt. Vi må vise at dersom det finnes en tur fra u til v, så finnes det en sti fra u til v.

La

$$u \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \dots\dots \to v_n \to v$$

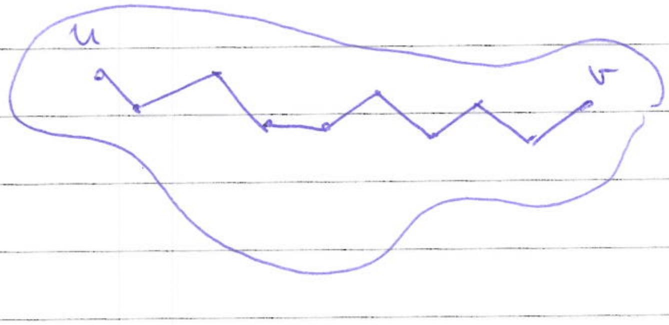
være en tur fra u til v av minimal lengde. Da må stedene underveis være forskjellige for hvis ikke kunne vi ha laget en kortere tur

kortere sti

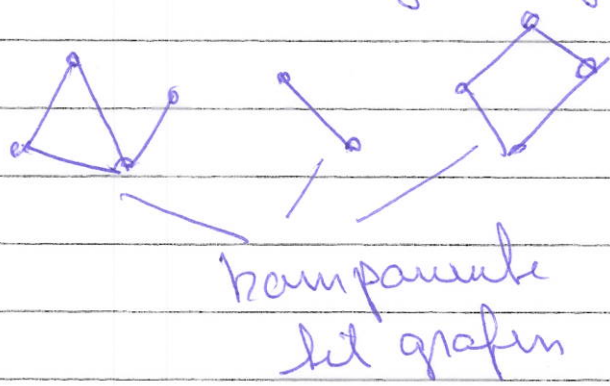
$$u \to v_1 \to \dots \to v_i \to \dots\dots \to v_j \to \dots \to v_n \to v$$

hvis disse er like

Definisjon: En graf er sammenhengende dersom det for alle $u, v \in V$ finnes en tur fra u til v.

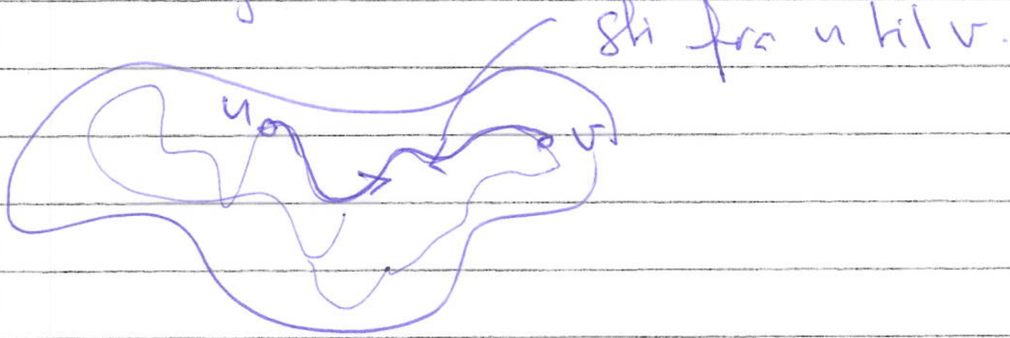


Ikke-sammenhengende graf.



Setning: En graf er sammenhengende hvis og bare hvis det finnes en tur som går gjennom alle noder.

Bevis: Hvis det finnes en tur som går gjennom alle noder, er grafen åpenbart sammenhengend.



Anta nå at grafen er sammenhengende, og N være det største antall noder noen tur ~~som~~ går innom. Hvis N er antall noder, er vi ferdige, hvis ikke la

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \dots \to v_k$$

være en tur som går innom et maksimalt

antall noder. Det må finnes en node u som ikke er med i turen, og siden grafen er sammenhengende, finnes det en tur fra v_n til u. Dermed er

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n \to \dots \to u$$

en sti som går innom minst N+1 noder, selvmotsigelse

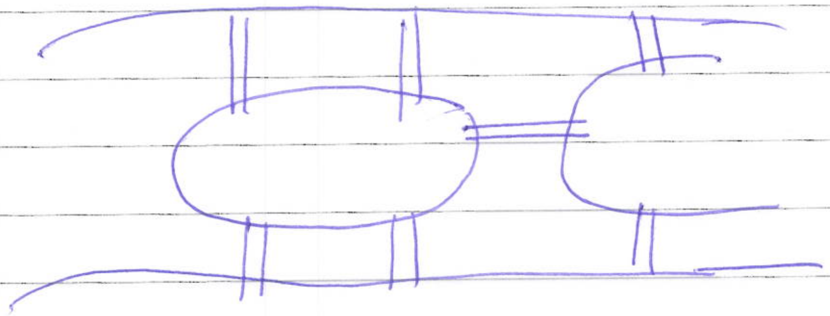
<u>Definisjon</u>: <u>Graden</u> til en node v er antall kanter som inneholder v. Den betegnes ved deg(v)

<u>Lemma</u>: Hvis e er antall kanter er

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$$

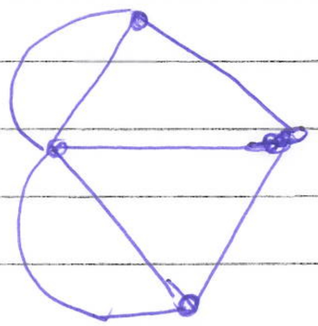
<u>Bevis</u>: Enhver kant tilhører to noder.

<u>Broene i Königsberg</u>



Er det mulig å gå over alle broene uten å bruke én mer enn én gang

Grafteoretisk versjon



Multigraf

Mulig å gjennomløpe alle kantene nøyaktig en gang.