11/11 - 2013

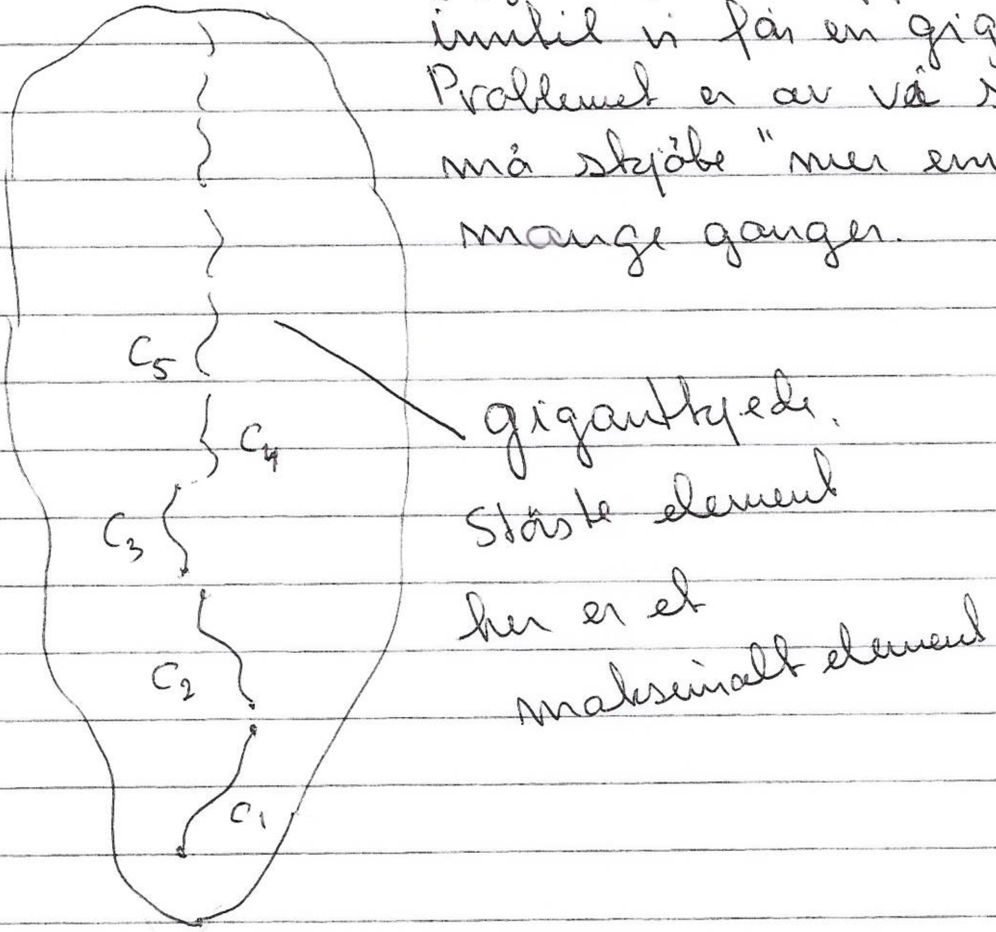
MAT1140

Zorns Lemma

Anta at $(X, \leq)$ er en partiellt ordnet mengde. En kjede C er en totalt ordnet delmengde av X, dvs hvis $x, y \in C$, så er enten $x \leq y$ eller $y \leq x$.

Zorns lemma: Anta at $(X, \leq)$ er en partiell ordning der hver kjede har en øvre skranke. Da har X et maksimalt element.

Bevisidé: Bygge kjeder "oppå" hverandre inntil vi får en gigantkjede. Problemet er at vi sannsynligvis må skjøte "mer enn uendelig" mange ganger.



Zorns lemma vil følge enkelt dersom vi kan vise

<u>Hausdorff maksimumsprinsipp</u>: Enhver partielt ordnet mengde inneholder en maksimal kjede (dvs. en kjede som ikke inneholdt i noen annen kjede)

<u>Bevis av Zorns lemma fra Hausdorffs maksimumsprinsipp</u>: La C være en maksimal kjede og la c være øvre skranke for C. Anta at c ikke er et maksimalt element. Da finnes det en $a > c$, og følgelig er $C \cup \{a\}$ en kjede som ikke inneholder C. Dette er umulig, og følgelig er a et maksimalt element.

For å bevise Hausdorffs maksimumsprinsipp trenger vi

<u>Utvalgsaksiomet</u>: Anta at $\mathcal{A}$ er en familie av ikke-tomme mengder. Da finnes det en funksjon $u : \mathcal{A} \to \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ slik at $u(A) \in A$ for alle $A \in \mathcal{A}$.

Vi kaller u en <u>utvalgsfunksjon</u> for $\mathcal{A}$.

La oss begynne på beviset for Hausdorffs maksimumsprinsipp. La $\mathcal{X}$ være mengden av alle kjeder i X. Inklusjon $\subseteq$ er en partiell ordning på $\mathcal{X}$.

Anta $C \in \mathcal{X}$. Hvis C ikke er en maksimal kjede, finnes det minst ett element $c \in X \setminus C$ slik at $C \cup \{c\}$ er en ekte utvidelse av C. Vi bruker en utvalgsfunksjon til å plukke ut én slik c for hver ikke-maksimal kjede C, og setter $C^+ = C \cup \{c\}$. Hvis C er en maksimal kjede, setter vi $C^+ = C$.

Definisjon: En delmengde $\mathcal{N}$ av $\mathcal{X}$ (dvs en samling kjeder) er lukket dersom
(i) Hvis $C \in \mathcal{N}$, så er $C^+ \in \mathcal{N}$
(ii) Hvis $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}$ er en kjede, så er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{N}$.

Legg merke til at $\mathcal{N}$ selv er en lukket mengde, men at $\{\emptyset\}$ ikke er det (siden $\emptyset^+ \notin \{\emptyset\}$)

Vi lar

$$\mathcal{M} = \bigcap \{\mathcal{N} : \mathcal{N} \text{ er lukket}\}$$

m.a.o.: en mengde er med i $\mathcal{M}$ hvis den er med i alle lukkede mengder. Hvis $\mathcal{M}$ er lukket, må den åpenbart være den minste lukkede mengden.

Lemma: $\mathcal{M}$ er lukket.

<u>Bevis</u>: Vi må sjekke betingelsene (i) og (ii). For å sjekke (i) antar vi at $C \in \mathcal{M}$. Da er C med i alle lukkede $\mathcal{N}$, og følgelig er C^+ med i alle lukkede $\mathcal{N}$. Det betyr at $C^+ \in \mathcal{M}$, og følgelig er betingelse (i) oppfylt.

Anta så at $\mathcal{C}$ er en kjede i $\mathcal{M}$. Da er $\mathcal{C}$ en kjede i alle $\mathcal{N}$, og følgelig er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ et element i alle lukkede $\mathcal{N}$. Det betyr at $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{M}$, og følgelig er (ii) oppfylt.

Vi vet nå at $\mathcal{M}$ er den minste av alle lukkede mengder. Målet er å vise at $\mathcal{M}$ er en ~~maksimal~~ kjede og at $\bigcup_{C \in \mathcal{M}} C$ er en maksimal kjede.

Vi må arbeide litt for å vise at $\mathcal{M}$ er en kjede.

<u>Definisjon</u>: Et element $C \in \mathcal{M}$ kalles <u>sammenlignbart</u> dersom C er sammenlignbar med alle $D \in \mathcal{M}$ (dvs vi har $C \subseteq D$ eller $D \subseteq C$ for alle $D \in \mathcal{M}$.)

<u>Lemma</u>: Anta at C er sammenlignbar og at $D \subsetneqq C$, $D \in \mathcal{M}$. Da er $D^+ \subseteq C$.

<u>Bevis</u>: Siden C er sammenlignbar, er enten $D^+ \subseteq C$ eller $D^+ \supsetneqq C$. Anta for motsigelse at $D^+ \supsetneqq C$. Da er $D \subsetneqq C \subsetneqq D^+$, og det er umulig

siden D^+ har høyst et element mer enn D.

<u>Lemma</u>: Anta at $C \in \mathcal{M}$ er sammenlignbar. For hver $D \in \mathcal{M}$ er da enten $D \subseteq C$ eller $D \supseteq C^+$.

<u>Bevis</u>: La

$$\mathcal{N} = \{D \in \mathcal{M} : D \subseteq C \text{ eller } D \supseteq C^+\}$$

Det holder å vise at $\mathcal{N}$ er lukket. Siden $\mathcal{M}$ er den minste lukkede mengden, er da $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ og lemmaet følger.

For å vise at $\mathcal{N}$ er lukket, må vi sjekke betingelsene (i) og (ii).

<u>Betingelse (i)</u>: Anta $D \in \mathcal{N}$. Da er ~~[illegible]~~ $D \subsetneq C$, $D = C$ eller $D \supsetneq C^+$. Hvis $D \subsetneq C$, er $D^+ \subseteq C$ ifølge forrige lemma, og i de to andre tilfellene er $D^+ \supseteq C^+$.

<u>Betingelse (ii)</u>: Anta $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$ er en kjede. Hvis $D \subseteq C$ for alle $D \in \mathcal{C}$, er $\bigcup_{D \in \mathcal{C}} D \subseteq C$. Dersom $D \supseteq C^+$ for en $D \in \mathcal{C}$, er $\bigcup_{D \in \mathcal{C}} D \supseteq C^+$. Uansett er $\bigcup_{D \in \mathcal{C}} D \in \mathcal{N}$.

<u>Lemma</u>: Alle elementer i $\mathcal{M}$ er sammenlignbare.

<u>Bevis</u>: Det holder å vise at mengden av sammenlignbare elementer er lukket. Vi må sjekke betingelsene (i) og (ii).

(i) Anta at C er sammenlignbar. ~~[illegible]~~

Vi må vise C^+ er sammenlignbar. For enhver $D \in \mathcal{M}$ vet vi at enten er $D \subseteq C$ eller $D \supseteq C^+$. Det betyr at enten er $D \subseteq C^+$ eller $D \supseteq C^+$ som viser at C^+ er sammenlignbar.

(iv) Anta at $\mathcal{C}$ er en kjede i $\mathcal{M}$ og at hver $C \in \mathcal{C}$ er sammenlignbar. Hvis $C \subseteq D$ for alle $C \in \mathcal{C}$, er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq D$. Hvis $D \subseteq C$ for (minst) én $C \in \mathcal{C}$, er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \supseteq D$. Uansett er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ sammenlignbar.

Siden alle elementer i $\mathcal{M}$ er sammenlignbare, er $\mathcal{M}$ en kjede. Siden $\mathcal{M}$ er lukket, er

$$M = \bigcup_{C \in \mathcal{M}} C$$

med i $\mathcal{M}$. Siden $\mathcal{M}$ er lukket, er $M^+ \in \mathcal{M}$. Dette er bare mulig dersom M er en maksimal kjede, og dermed er Hausdorffs maksimumsprinsipp bevist. Siden vi allerede har vist at dette prinsippet medfører Zorns lemma, er vi ferdig.