12/11 - 2013

MAT 1140

Vi skal nå se hvordan vi kan konstruere kompliserte tallsystemer fra enklere. Vi skal begynne med de naturlige tall $\mathbb{N}$ og se hvordan de kan brukes til å konstruere de hele tallene. Deretter skal vi bruke $\mathbb{Z}$ til å konstruere $\mathbb{Q}$, og til slutt skal vi antyde hvordan $\mathbb{Q}$ kan brukes til å konstruere $\mathbb{R}$.

Konstruksjon av $\mathbb{Z}$ fra $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Vi antar at vi har full innsikt i regnereglene for $\mathbb{N}$ og at vi ønsker å definere de hele tallene $\mathbb{Z}$ og regneoperasjonene på dem.

Utgangspunkt: Vi ønsker å utvide $\mathbb{N}_0$ slik at subtraksjon alltid gir mening — vi vil at uttrykket $a-b$ skal gi mening uansett hvilket tall a, b er størst. Vi må ta hensyn til at noen av disse uttrykkene skal være like, f. eks. skal vi ha $27-31 = 4-8$. Spørsmålet er når to par (a,b) og (c,d) gir opphav til det samme "tallet" $a-b=c-d$. Siden vi ikke har de negative tallene ennå, kan vi ikke bruke $a-b=c-d$ som definisjon, men vi kan isteden bruke $a+d=b+c$ som bare involverer tall i $\mathbb{N}$.

12/11 - 2013

MAT 1140

Vi skal nå se hvordan vi kan konstruere kompliserte tallsystemer fra enklere. Vi skal begynne med de naturlige tall $\mathbb{N}$ og se hvordan de kan brukes til å konstruere de hele tallene. Deretter skal vi bruke $\mathbb{Z}$ til å konstruere $\mathbb{Q}$, og til slutt skal vi antyde hvordan $\mathbb{Q}$ kan brukes til å konstruere $\mathbb{R}$.

Konstruksjon av $\mathbb{Z}$ fra $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Vi antar at vi har full innsikt i regnereglene for $\mathbb{N}$ og at vi ønsker å definere de hele tallene $\mathbb{Z}$ og regneoperasjonen på dem.

Utgangspunkt: Vi ønsker å utvide $\mathbb{N}_0$ slik at subtraksjon alltid gir mening – vi vil at uttrykket $a-b$ skal gi mening uansett hvilket tall a, b er størst. Vi må ta hensyn til at noen av disse uttrykkene skal være like, f. eks. skal vi ha $27-31 = 4-8$. Spørsmålet er når to par (a,b) og (c,d) gir opphav til det samme "tallet" $a-b = c-d$. Siden vi ikke har de negative tallene ennå, kan vi ikke bruke $a-b=c-d$ som definisjon, men vi kan istedenfor bruke $a+d = b+c$ som bare involverer tall i $\mathbb{N}$.

<u>Definisjon</u>: Definer en relasjon $\sim$ på $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ved

$$(a,b) \sim (c,d) = a+d + b+c$$

<u>Lemma</u>: $\sim$ er en ekvivalensrelasjon

<u>Bevis</u>: Vi må sjekke de tre kriteriene

(i) <u>Refleksivitet</u>: $(a,b) \sim (a,b)$ siden $a+b = a+b$

(ii) <u>Symmetri</u>: Anta $(a,b) \sim (c,d)$. Da er $a+d = b+c$, dvs $c+b = d+a$, som gir $(c,d) \sim (a,b)$

(iii) <u>Transitivitet</u>: Anta $(a,b) \sim (c,d)$ og $(c,d) \sim (e,f)$. Da er

$$a+d = b+c \quad \text{og} \quad c+f = d+e$$

Legger vi sammen, får vi

$$a+d+c+f = b+c+d+e$$

som gir $a+f = b+e$, dvs $(a,b) \sim (e,f)$.

<u>Definisjon</u>: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\sim$ = mengden av alle ekvivalensklassen

Vi betegner ekvivalensklassen til (a,b) med $[a-b]$

Observasjon: Alle ekvivalensklasser av typen $[0-0]$, $[n-0]$, $[0-m]$ der $n, m \in \mathbb{N}$ er forskjellige.

Sjekker noen eksempler: $[n-0] \neq [k-0]$ siden $n+0 \neq k+0$
$[n-0] \neq [0-m]$ siden $n+m \neq 0+0$.

Setning: For alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ er $[a-b]$ lik en ekvivalensklasse av formen $[0-0]$, $[n-0]$ eller $[0-m]$

Bevis: Deler opp i tre tilfeller.
(i) $a > b$: Sett $n = a-b$, da er $[a-b] = [n-0]$ siden $a+0 = n+b$.
(ii) $a = b$: Da er $[a-b] = [0-0]$ siden $a+0 = b+0$
(iii) $a < b$: Sett $m = b-a$, da er $[a-b] = [0-m]$ siden $a+m = 0+b$.

Vi har dermed full oversikt over ekvivalensklassene til $\sim$. Uformelt tenker vi oss at $[n-0]$ er n, $[0-0]$ er 0 og $[0-m]$ er $-m$.

Neste skritt på veien er å definere algebraiske operasjoner. Det naturlige er å definere
$[a-b] + [c-d] = [(a+c)-(b+d)]$, men er denne operasjonen veldefinert, dvs uavhengig av hvilke representanter vi velger for ekvivalensklassene? Vi har

Lemma 4: Hvis $(a,b) \sim (a',b')$ og $(c,d) \sim (c',d')$, så er $(a+c, b+d) \sim (a'+c', b'+d')$.

Bevis: Vi har $a+b' = a'+b$ og $c+d' = c'+d$, så

$$(a+c)+(b'+d') = a'+b+c'+d,$$ ~~så~~ dvs

$$(a+c, b+d) \sim (a'+c', b'+d').$$

Definisjon: Vi definerer addisjon på $\mathbb{Z}$ ved
$$[a-b] + [c-d] = [(a+c)-(b+d)].$$

Observer at vi har $[n-0] + [m-0] = [(n+m)-0]$
$$[n-0] + [0-m] = [n-m, 0]$$

Setning: Addisjon i $\mathbb{Z}$ er kommutativ og assosiativ.

Bevis: Kommutativ: $[a-b] + [c-d] = [a+c-(b+d)]$
$$= [c-d] + [a-b]$$

Assosiativ: $[a-b] + ([c-d] + [e-f]) =$

$$[a-b] + [(c+e)-(d+f)] = [(a+c+e)-(b+d+f)]$$

og $([a-b] + [c-d]) + [e-f] = [(a+c)-(b+d)] + [e-f]$

$$= [(a+c+e)-(b+d+f)]$$

Flere observasjoner: $[0-0]$ fungerer som nullelement siden $[a-b]+[0-0]=[a-b]$

Negativt element Vi definerer $-[a-b]=[b-a]$. Dette er naturlig siden $[a-b]+[b-a]=[0-0]$

La oss nå se på multiplikasjon. Det naturlige er å definere

$$[a-b][c-d]=[(ac+bd)-(ad+bc)]$$

men er dette uttrykket avhengig av representanter.

Lemma: Anta $(a,b)\sim(a',b')$ og $(c,d)\sim(c',d')$. Da er $(ac+bd,\, ad+bc)\sim(a'c'+b'd',\, a'd'+b'c')$.

Bevis: Vi kan anta at $a\geq a'$ (hvis ikke bytter vi bare rekkefølgen på merkede og umerkede elementer). Setter vi $a=a'+h$ er $b=b'+h$. Vi må se på to tilfeller $c\geq c'$ og $c'<c$.

Tilfelle 1: $c\geq c'$. Vi setter $c=c'+k$. Da er $d=d'+k$, og vi får

$$ac+bd+a'd'+b'c'=(a'+h)(c'+k)+(b'+h)(d'+k)$$

$$+a'd'+b'c'=a'c'+a'k+c'h+hk+b'd'+b'k+$$

$$+d'h+hk+a'd'+b'c'$$

Tilsvarende

$$a'c' + b'd' + ad + bc = a'c' + b'd' +$$

$$(a'+h)(d'+k) + (b'+h)(c'+k) = a'c' + b'd' +$$

$$+ a'd' + a'k + d'h + hk + b'c' + b'k + c'h + kh$$

som er nöyaktig det samme vi fikk istad.

Tilfelle 2: $c < c'$. Vi setter $c' = c + k$ og får $d' = d + k$. Akkurat tilsvarende regninger som ovenfor gir resultatet.

Definisjon: $[a - b][c - d] = [(ac + bd) - (ad + bc)]$

Observer: $[a - 0][c - 0] = [ac - 0]$

$[a - 0][0 - b] = [0 - ab]$ $(a(-b) = -ab)$

$[0 - a][0 - b] = [ab - 0]$ $((-a)(-b) = ab)$

Vi kan sjekke flere regneregler ved regning, f. eks. den distributive lov

$$[a - b]([c - d] + [e - f]) = [a - b][c - d] + [a - b][e - f]$$

men det er ikke spesiellt spennende.