16/9 - 2013

MAT1140

Husk:

(i) En tur eller vandring er en sekvens $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3, \dots, v_{n-1} e_{n-1} v_n$ av hjørner v_i og kanter e_i slik at e_i forbinder v_i og v_{i+1}, dvs $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Vi tillater turer med null skritt, dvs ~~man~~ turer som v_i som går fra v_i til seg selv.

(ii) En sti er en tur som aldri er innom et hjørne mer enn en gang

(iii) En sykel er en tur som begynner og ender i samme punkt og som ikke er innom noe annet hjørne mer enn én gang

Husk også: En graf er sammenhengende dersom gitt to punkter $u, v \in V$ finnes det alltid en tur/sti som begynner i u og ender i v.

Anta nå at vi er gitt en graf (V, E) og definer en relasjon på E ved

$u \sim v \iff$ det finnes en tur fra u til v.

Setning: $\sim$ er en ekvivalensrelasjon

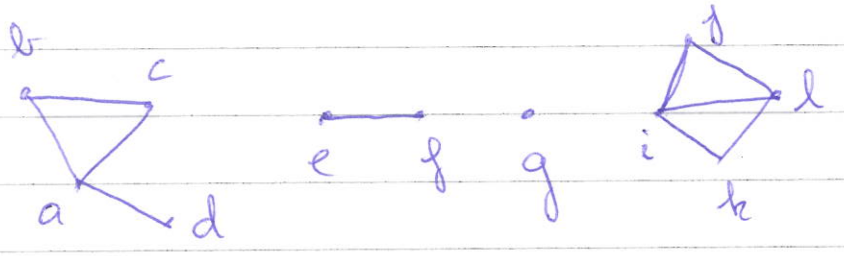
Bevis: Vi må sjekke de tre kravene til en ekvivalensrelasjon.

(i) Refleksiv: $u \sim u$ siden vi godtar turen med null skritt: u

(ii) Symmetri: Dersom $u \sim v$ går det en tur $u \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n \to v$ fra u til v, og den "baklengse" turen $v \to v_n \to \dots \to v_1 \to u$ går fra v til u. Altså er $v \sim u$.

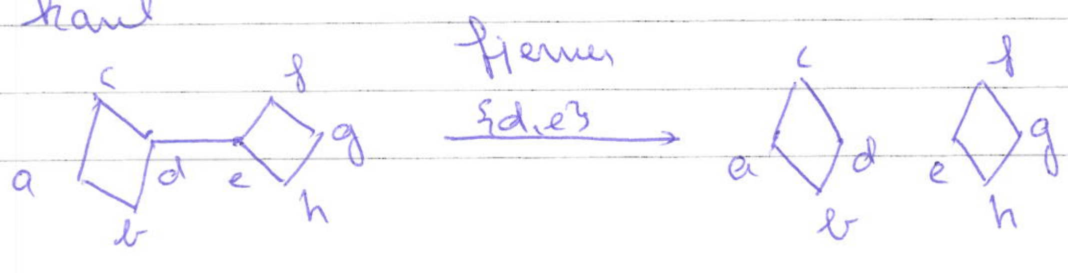
(iii) Transitivitet: Anta at $u \sim v$ og $v \sim z$. Da finnes det turer $u \to v_1 \to \dots \to v_n \to v$ og $v \to z_1 \to \dots \to z_k \to z$, og disse kan settes sammen til en tur $u \to v_1 \to \dots \to v_n \to v \to z_1 \to \dots \to z_k \to z$. Dette viser at $u \sim z$.

Ekvivalensklassene til $\sim$ kalles komponentene til grafen. To hjørner u, v ligger i samme komponent dersom det finnes en tur fra u til v.



En graf med fire komponenter.

Noen ganger kan vi gjøre en sammenhengende graf usammenhengende ved å fjerne en kant

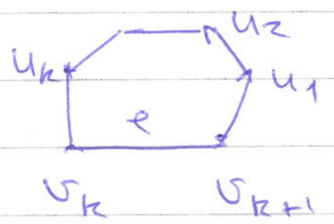


<u>Setning</u>: Anta at $G=(V,E)$ er en sammenhengende graf og at e er en kant i G. Da er $G' = (V, E\setminus\{e\})$ sammenhengende hvis og bare hvis det finnes en ekte sykel i G som inneholder e.

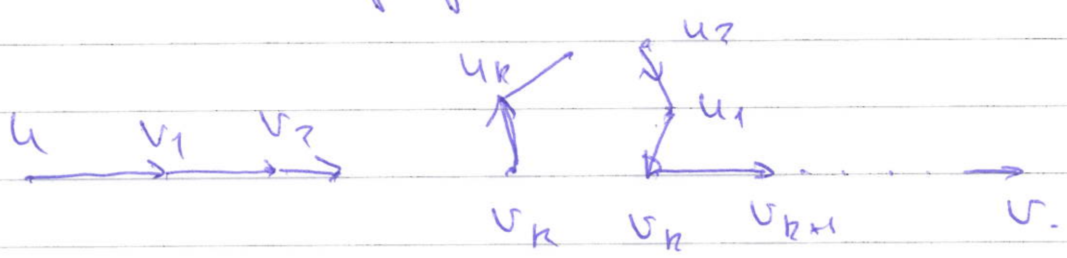
<u>Bevis</u>: Anta først det finnes en sykel i G som inneholder e, og la $u,v \in V$. Vi må vise at det finnes en tur fra u til v i G'. Siden G er sammenhengende, finnes det en sti fra u til v i G. Hvis denne ~~turen~~ stien ikke inneholder e, har vi funnet en sti fra u til v i G'. Hvis stien inneholder e, har vi denne situasjonen

$$u \to v_1 \to v_2 \to \cdots\; v_k \xrightarrow{e} v_{k+1} \to \cdots \to v.$$

Sykelen e inngår i, må ha dette utseendet



og vi kan putte den inn i stien ovenfor som en erstatning for e



Vi har nå fått en ny tur fra u til v, og siden en sykel bare kan inneholde en kant én gang, forekommer ikke e i den nye turen. Dermed har vi funnet en tur fra u til v i G'.

Anta så at G' er sammenhengende. Vi må vise at det finnes en ekte sykel ~~som~~ i G som inneholder e. La $e = \{u, v\}$. Siden G' er sammenhengende, finnes det en sti $v \to v_1 \to \ldots \to u$ fra v til u i G'. Men da er

$$v \to v_1 \to \ldots \to u \xrightarrow{e} v$$

en sykel i G som inneholder e.

Vi trenger også å vite hva som skjer dersom kanten vi fjerner ikke inngår i noen sykel.

Setning: (Anta at G er sammenhengende) Dersom e ikke inngår i noen sykel i $G = (V, E)$, består $G' = (V, E \setminus \{e\})$ av nøyaktig to komponenter.

Bevis: Anta at $e = \{u, v\}$. Vi skal vise at G' har to komponenter, én som inneholder u og én som inneholder v. Siden u og v åpenbart ikke kan ligge i samme komponent (det ville ha ledet til en sykel som inneholder e akkurat som i forrige argument) er det nok å vise at ethvert element z i G' er forbundet med enten u eller v.

Siden G er sammenhengende, finnes det en sti $z \to v_1 \to v_2 \to \dots \to u$ fra z til u i G. Hvis denne *ikke* inneholder e, er vi ferdig. Hvis den inneholder e, må stien være

$$z \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v \xrightarrow{e} u$$

siden u bare kan være med i stien én gang. Men dermed er

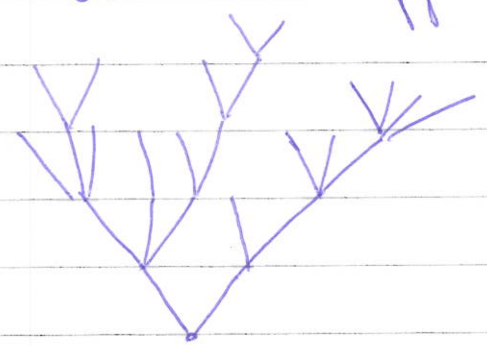
$$z \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v$$

en sti fra z til v i G'!

Dette viser at ethvert element i G' er forbundet med enten u eller v, og siden G' må ha minst to komponenter, medfører dette at G' må ha nøyaktig to elementer, én som inneholder u og én som inneholder v.

Trær

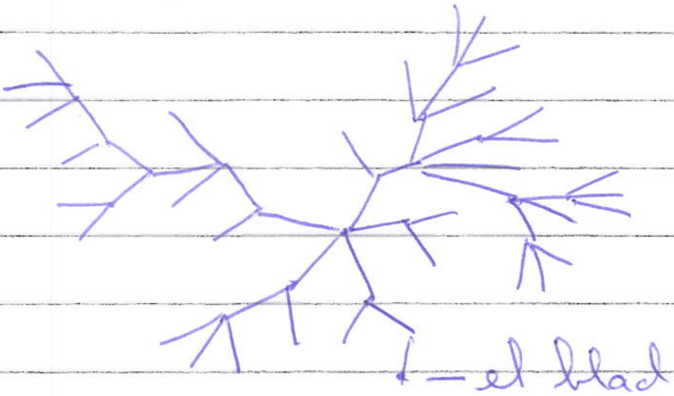
Trær er en viktig klasse av grafer. Intuitivt tenker vi på et tre som en samling grener som vokser opp av en rot



Et tre

En viktig egenskap ved trær er at grener aldri vokser sammen, og dette er utgangspunktet for den abstrakte definisjonen

<u>Definisjon</u>: Et <u>tre</u> er en sammenhengende graf uten sykler.



Et tre uten åpenbar rot.

Av figuren ser vi at treet har noen "ytre" hjørner som bare er forbundet med ett annet hjørne. Disse kalles <u>blader</u>. Mer formelt er et blad et hjørne som bare hører til en kant.

<u>Lemma</u>: Alle trær har blader

<u>Bevis</u>: Velg et hjørne og en kant ut fra hjørnet. Denne kanten fører til et nytt hjørne og velg så en <u>ny</u> kant ut ifra dette hjørnet. Fortsett til det ikke lenger er mulig å velge en <u>ny</u> kant (dette må skje en gang siden det er bare endelig mange kanter i grafen). Hjørnet vi stopper i, må være et blad, for hvis det ikke var et blad, ville det høre til en kant som allerede var

brukt, og det ville lede til en sykel, og trær har ingen sykler.

Observér at vi kan fjerne et blad og den tilhørende kanten fra et tre og fortsatt ha et tre.

Det er mange forskjellige måter å beskrive trær på, og vi skal se på noen av dem.

<u>Teorem</u>: Anta at G er en graf med n hjørner og e kanter. Da er følgende ekvivalent
(i) G er et tre
(ii) G er sammenhengende og $n = e+1$

<u>Bevis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Anta at G er et tre. Vi vet allerede at G er sammenhengende, så vi trenger bare å vise at $n = e+1$. Vi gjør dette ved induksjon på n. Hvis $n=1$ eller $n=2$, holder åpenbart formelen siden de eneste eksemplene er

$n = 1$ • $n = 1, e = 0$

$n = 2$ •—• $n = 2, e = 1$

Anta så at resultatet holder for trær med k noder og anta at G har $k+1$ noder. La G' være treet vi får ved å fjerne et blad og den tilhørende kanten. Ved induksjonsantagelsen har vi da $k = e' + 1$ der e' er antall kanter i G'. Antall hjørner og sider i G er da $k+1$ og $e'+1$, og dermed får vi

$$k+1 = (e'+1)+1,$$

som er det vi skulle vise.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Anta at det finnes en sammenhengende graf G som ikke er et tre, men hvor $n = e+1$. Siden G ikke er et tre, må det finnes en sykel, og det betyr at vi kan fjerne en kant uten å ødelegge sammenhengen. Enten er den nye grafen et tre, eller vi kan fjerne en ny kant og fortsatt ha en sammenhengende graf. Siden det bare er et endelig antall kanter å fjerne, må denne prosessen før eller senere stoppe, og vi sitter igjen med et tre G'. Etter det vi allerede har vist, er

$$n' = e'+1$$

der n' og e' er henholdsvis antall hjørner og kanter i G'. Men dette er umulig siden $n' = n$, $e' < e$ og vi startet med antagelsen

$$n = e+1$$