18/11-2013

MAT1140

Fra $\mathbb{N}_0$ til $\mathbb{Z}$.

Vi er i ferd med å bygge $\mathbb{Z}$ fra $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Først introduserte vi en ekvivalensrelasjon på $\mathbb{N}_0^2$ ved å sette

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = c+b$$

Vi kalte ekvivalensklassen til (a,b) for $[a-b]$ og viste at alle ekvivalensklasser var av en av typene $[n-0]$, $[0-0]$ eller $[0-m]$ der $n, m \in \mathbb{N}$.

Videre har definert addisjon ved

$$[a-b] + [c-d] = [(a+c)-(b+d)]$$

etter først ~~og~~ å ha vist at denne operasjonen er veldefinert. Vi hadde også definert en total ordning ved

$$[a-b] \leq [c-d] \iff a+d \leq b+c.$$

Planen nå er å definere multiplikasjon ved

$$[a-b][c-d] = [(ac+bd)-(ad+bc)]$$

Forrige gang viste vi at denne definisjonen uavhengig av hvilke representanter (a, b) og (c, d) vi velger for de to ekvivalensklassene. Vi har dermed

Definisjon: Multiplikasjon i $\mathbb{Z}$ er definert ved

$$[a-b][c-d] = [(ac+bd)-(ad+bc)]$$

Setning: Vi har

(i) $xy = yx$ kommutativ lov

(ii) $x(yz) = (xy)z$ assosiativ lov

(iii) $x(y+z) = xy+xz$ distributiv lov

(iv) $0x = 0$ for alle x

(v) $1 \cdot x = x$ for alle x.

Bevis: Alle disse punktene bevises på samme måte – direkte utregning. Vi tar (iii) som eksempel:

Sett $x = [a-b]$, $y = [c-d]$, $z = [e-f]$, og regn ut begge sider

$$VS: [a-b]([c-d]+[e-f]) = [a-b]([(c+e)-(d+f)])$$

$$= [(a(c+e)+b(d+f))-(a(d+f)+b(c+e))]$$

$$= [(ac+ae+bd+bf)-(ad+af+bc+be)]$$

$$HS \quad [a-b][c-d]+[a-b][e-f] =$$

$= [(ac+bd)-(bc+ad)] + [(ae+bf)-(be+af)]$

$= [(ac+ae+bd+bf)-(bc+ad+be+af)]$

og vi ser at de to uttrykkene er like

La oss undersøke hvordan multiplikasjonen vår stemmer med tidligere erfaringer. Husk notasjonen

$$n \text{ for } [n-0],\ 0 \text{ for } [0-0] \text{ og } -m \text{ for } [0-m]$$

Vi har: $nm = [n-0][m-0] = [(nm-0\cdot 0)-(n\cdot 0+0\cdot m)]$
$= [nm-0] = nm$

$$n(-m) = [n-0][0-m] = [(n\cdot 0-0\cdot m)-(nm-0\cdot 0)]$$
$$= [0-nm] = -(nm)$$

$$(-n)(-m) = [0-n][0-m] = [(0\cdot 0+nm)-(0m+n0)]$$
$$= [nm-0] = nm$$

Vi har dermed konstruert et tallsystem $\mathbb{Z}$ som utvider $\mathbb{N}_0$ ved å legge til negative tall på en slik måte at regnereglene bevares.

Fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Q}$

Vi skal nå bruke de hele tallene til å definere de rasjonale ved en liguende prosedyre som vi har brukt ovenfor.
Det intuitive utgangspunktet er at rasjonale tall $\frac{a}{b}$ er dannet av par av hele tall (a,b), og at vi regner to av disse uttrykkene $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ som like dersom

$$ad = bc.$$

Vi begynner med å definere

$$\Phi = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : b \neq 0\}$$

(vi ønsker ikke å dividere på 0) og innføre en relasjon $\sim$ på Φ ved

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Setning $\sim$ er en ekvivalensrelasjon

Bevis: Vi må sjekke de tre kravene
(i) Refleksiv $(a,b) \sim (a,b)$ siden $ab = ab$
(ii) Symmetri: Anta $(a,b) \sim (c,d)$. Da er $ad = bc$ og følgelig er $cb = da$, som gir $(c,d) = (a,b)$
(iii) Transitivitet: Anta $(a,b) \sim (c,d)$ og

$(c,d)\sim(e,f)$, dvs $ad=bc$ og $cf=de$. Ganger vi sammen disse likhetene, får vi

$$adcf=bcde.$$

Hvis $c\neq 0$ kan vi forkorte med cd (d er alltid forskjellig fra 0) og få $af=be$, dvs $(a,b)\sim(e,f)$ som er det vi ønsker.

Hva om $c=0$? Da må også $a=0$ og $e=0$ pga ligningene $ad=bc$ og $cf=de$, der d ikke er null. Altså har vi også i dette tilfellet $af=be$ siden begge sider er 0. Dermed har vi $(a,b)\sim(e,f)$ uansett.

Vi skal skrive $\frac{a}{b}$ for ekvivalensklassen til (a,b) og vi skal skrive n for $\frac{n}{1}$ der $n\in\mathbb{Z}$.

Vi ønsker å definere addisjon ved

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

men først må vise at denne operasjonen er veldefinert.

<u>Setning</u>: Anta at ~~...~~ $(a,b)\sim(a',b')$ og $(c,d)\sim(c',d')$. Da er ~~...~~ $(ad+bc,bd)\sim(a'd'+b'c',b'd')$

<u>Bevis</u>: $ab'=a'b$ og $cd'=c'd$. Vi har

$$(ad+bc)b'd' = \underbrace{ab'}_{a'b}dd' + bc\underbrace{b'd'}_{c'd}$$

$$= a'bdd' + bc'b'd' = (a'd'+b'c')bd$$

som viser at $(ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$.

Vi kan nå gjennomføre planen vår

<u>Definisjon:</u> $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

<u>Setning:</u> Operasjonen + er assosiativ og kommutativ.

Legg merke til at $n+m = \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n\cdot 1 + m\cdot 1}{1\cdot 1}$

$$= \frac{n+m}{1} = n+m$$

slik at addisjonen i $\mathbb{Q}$ stemmer med addisjonen i $\mathbb{Z}$.

Vi fortsetter med ~~addisjon~~ multiplikasjon. Ønsket er å definere $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, men vi må først sjekke at dette gir mening.

<u>Setning:</u> Hvis $(a,b)\sim(a',b')$ og $(c,d)\sim(c',d')$, så er $(ac,bd)\sim(a'c',b'd')$

<u>Bevis:</u> Vi har $ab' = a'b$ og $cd' = c'd$. Dermed er

$$\underbrace{ab'}_{a'b}\underbrace{cd'}_{c'd} \;\; acb'd' = a'c'bd \Leftrightarrow (ac)(b'd') = (a'c')(bd),\text{ dvs}$$

$(ac, bd) \sim (a'c', b'd')$.

Vi kan nå gjennomføre planen

Definisjon: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Setning: Vi har

(i) $x \cdot y = y \cdot x$

(ii) $x(yz) = (xy)z$

(iii) $x(y+z) = xy + xz$

(iv) $0 \cdot x = 0$

(v) $1 \cdot x = x$

Bevis et er ved direkte utregning Vi tar (iii) som eksempel:

VS $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\left(\frac{cf+ed}{df}\right) = \frac{acf + aed}{bdf}$

HS $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{acbf + aebd}{b^2 df}$

Siden $b \neq 0$, er det lett å vise

$$\frac{acf + aed}{bdf} = \frac{acbf + aebd}{b^2 df}.$$

Vi ser at multiplikasjon tilsvarer det vi har fra tidligere:

$$n \cdot m = \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{nm}{1} = nm$$

La oss til slutt se på ordning. Observer først at siden $\frac{a}{-n} = \frac{-a}{n}$ kan vi alltid forutsette av nevneren er et positivt tall. I så fall er det fornuftig å definere

$$\frac{a}{n} \leq \frac{b}{m} \Leftrightarrow am \leq bn$$

Igjen må vi sjekke at denne definisjonen er uavhengig av representanten.

<u>Lemma</u>: Anta at $(a,n) \sim (a',n')$, $(b,m) \sim (b',m')$ der $n,n',m,m' > 0$. Da er $am \leq bn$ hvis og bare hvis $a'm' \leq b'n'$.

<u>Bevis</u>: Vi har $an' = a'n$, $bm' = b'm$. Siden $n,n',m,m' > 0$, har vi

$$a'm' \leq b'n' \Leftrightarrow \underbrace{a'n}_{an'}m'm \leq \underbrace{b'm}_{bm'}n'n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow an'm'm \leq bm'n'n \Leftrightarrow am \leq bn$$

<u>Definisjon</u>: Hvis $n,m > 0$, definerer vi

$$\frac{a}{n} \leq \frac{b}{m} \Leftrightarrow am \leq bn$$

<u>Setning</u>: $\leq$ er en total ordning på $\mathbb{Q}$

<u>Bevis</u>: Vi må sjekke de fire betingelsene.

(i) <u>Refleksiv</u>: Siden $an \leq an$, er $\frac{a}{n} \leq \frac{a}{n}$

Antisymmetri: Hvis $\frac{a}{n} \leq \frac{b}{m}$ og $\frac{b}{m} \leq \frac{a}{n}$, så er $am \leq bn$ og $bn \leq am$, dvs $am = bn$. Følgelig er $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$.

Transitiv: Hvis $\frac{a}{n} \leq \frac{b}{m}$ og $\frac{b}{m} \leq \frac{c}{k}$, så er $am \leq bn$ og $bk \leq cm$. Vi multipliserer den første ulikheten med $k > 0$ og får $amk \leq bnk \leq cmn$. Siden $m > 0$, følger det at $ak \leq cn$, dvs $\frac{a}{n} \leq \frac{c}{k}$.

Totalitet: Siden ordningen på $\mathbb{Z}$ er total, er enten $am \leq bn$ ~~[illegible]~~ eller $am \geq bn$, dvs enten $\frac{a}{n} \leq \frac{b}{m}$ og $\frac{a}{n} \geq \frac{b}{m}$.