19/8 - 13

MAT1140

Undervisere: Tom Lindström — mandag, torsdag } forelesninger; onsdag regneøvelser

Torstein K. Nilssen - tirsdag - oppgave-gjennomgang

Sjekk nettsiden for detaljer.

Om kurset

Hovedvekten i dette kurset ligger på metoder og tankeprosesser, men dere skal også lære mye om forskjellige slags matematiske strukturer:

- mengder
- relasjoner (bl.a. ordninger og grafer)
- funksjoner
- tallteori
- kardinalitet
- tallsystemer

Matematiske teorier er bygget opp ved hjelp av logiske resonnementer, og vi skal begynne med å se litt på hvordan matematiske utsagn er bygget opp logisk sett.

Matematiske bevis

Grafisk kan vi tenke på et matematisk bevis slik:

Den grunnleggende oppgaven til matematisk logikk er å beskrive matematiske utsagn og matematiske bevis.

Matematiske utsagn og predikater

Et __utsagn__ er påstand som er enten sann eller gal i "objektiv" forstand

Eksempler på utsagn

(i) 7 er større enn 9 (gal)

(ii) Enhver deriverbar funksjon er kontinuerlig (riktig)

(iii) Det finnes uendelig mange primtall (riktig)

Eksempler på ikke-utsagn:

(i) Hva heter du? Spørsmål

(ii) La meg være i fred! Ønske / kommando

(iii) Munch er en større maler enn Rembrandt. } Smaksspørsmål

(iv) x er større enn 7. Avhenger av hva x er

Eksemplene (i)-(iii) har ingen plass i en matematisk teori, men (iv) har det, f. eks. i påstander av typen

Hvis x er større enn 7, så er x større enn 5.

Selv om denne påstanden ikke er spesielt spennende eller oppsiktsvekkende, er den utvilsomt fornuftig.

For dekke det siste tilfellet innfører vi påstander som avhenger av variable, f. eks.

$x + y > z$

m er delelig med n

Disse påstandene blir utsagn når vi velger verdier for variablene x, y, z og m, n, f.eks.

$x=3, y=7, z=9$: $3+7>9$ sann!

$x=2, y=3, z=6$: $2+3>6$ gal!

$m=9, n=3$: 9 er delelig med 3 sann!
$m=7, n=3$: 7 er delelig med 3 gal!

—

Vi bruker notasjoner som $P(x,y,z)$ og $Q(m,n)$ for å symbolisere ~~pås~~ predikater.

Konnektiver og kvantorer

Vi bygger mer kompliserte matematiske påstander ved å bruke konnektiver og kvantorer:

Konnektiver:

$\sim$: ikke $\qquad \sim A$: "ikke-A"

$\wedge$: og $\qquad A \wedge B$: "A og B"

$\vee$: eller $\qquad A \vee B$: "A eller B"

$\Rightarrow$ implikasjon $A \Rightarrow B$ "A impliserer B", "Hvis A, så B"

$\Leftrightarrow$ ekvivalens: $A \Leftrightarrow B$ "A er ekvivalent med B", "A hvis og bare hvis B"

Kvantorer:

$\forall$ allkvantor $\forall x\, A(x)$ "for alle x er A(x) sann"

$\exists$ eksistenskvantor $\exists x\, A(x)$ "det eksisterer en x slik at A(x) er sann"

Ved hjelp av konnektiver og kvantorer kan man bygge opp mer kompliserte påstander:

$$\forall x \forall y \forall z \left(x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z \right)$$

$$\forall x \forall y \left(x<y \Rightarrow \exists z \left(x<z \wedge z<y \right) \right)$$

$$\forall x \left(\sim(x=0) \Rightarrow \exists y \left(xy = 1 \right) \right)$$

Disse utsagnene er sanne hvis vi snakker om reelle tall, men bare det første er sant om vi snakker om hele tall.

Legg merke til at påstandene ovenfor er utsagn, men de er bygget opp av predikater som $x<y$ og $xy=1$.

Konnektiver og sannhetsverditabeller

Sannhetsverditabeller er et praktisk hjelpemiddel til å studere sammensatte utsagn. Vi skriver henholdsvis T og F for å markere at et utsagn er sant eller galt.

A	$\sim A$
T	F
F	T

Denne tabellen beskriver at $\sim A$ alltid har motsatt sannhetsverdi av A

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Skal $A \wedge B$ være sann, må både A og B være sanne.

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

For at $A \vee B$ skal være sann, er det nok at (minst) én av A, B er sann.

A	B	$A \Rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

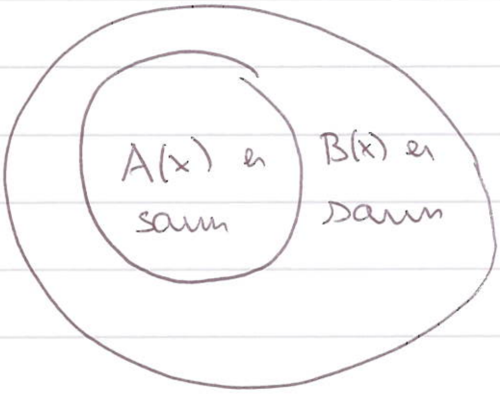
"Hvis A, så B" er bare gal dersom A er sann, men B er gal.

Denne tolkningen tar litt tid å bli vant til, og den er kanskje lettest å forstå hvis vi tenker på predikater og ikke ~~setnin~~ utsagn.

$$A(x) \Rightarrow B(x)$$

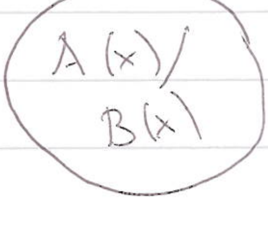
bör bety at hver gang $A(x)$ er sann, så er $B(x)$ sann, men den legger ikke noen föringer på $B(x)$ skal være når $A(x)$ er gal.

Hvis vi tegner opp tilfellene hvor $A(x)$ og $B(x)$ holder, har



A	B	$A \Leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

A og B har alltid samme sannhetsverdi



$A(x)$ og $B(x)$ er sann for nöyaktig de samme x-verdiene

Vi kan bruke sannhetsverditabeller til å studere mer kompliserte utsagn

$$(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge C)$$

A	B	C	$A \wedge B$	$\sim A$	$\sim A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge C)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

$$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\sim B$	$\sim A$	$\sim B \Rightarrow \sim A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Et utsagn der alle linjer i sannhetsverditabellen er T kalles en <u>tautologi</u>.