19/9 - 2013

MAT 1140

Mer om trær

Fra forrige gang:

Definisjon: Et tre er sammenhengende graf uten sykler.

Vi viste:

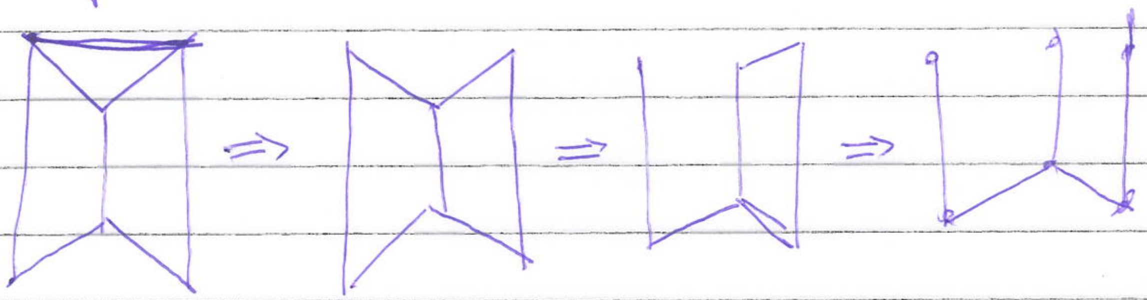
Teorem: Anta G er en graf med n hjørner og e kanter. Da er følgende ekvivalent

(i) G er et tre

(ii) G er sammenhengende og $n = e + 1$

Beviset ga oss litt informasjon som er verd å ta med seg: Gitt en sammenhengende graf, kan vi fjerne kanter inntil vi sitter igjen med et tre med de samme hjørnene som den opprinnelige grafen. Vi sier at treet spenner ut grafen

Eksempel



Mange andre muligheter

Her er en karakterisering som bruker sykler istedenfor sammenheng:

<u>Teorem</u>: Anta at G er en graf med n hjørner og e kanter. Da er følgende ekvivalent:
(i) G er et tre
(ii) G har ingen sykler og $n = e+1$

<u>Bevis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Dette vet vi allerede
(ii) $\Rightarrow$ (i). Vi må vise at G er sammenhengende. La $K_1, K_2, \ldots, K_k$ være komponentene til. Hver komponent er sammenhengende og uten sykler, og dermed et tre. Det betyr at

$$\begin{aligned} n_1 &= e_1 + 1 \\ n_2 &= e_2 + 1 \\ &\vdots \\ n_k &= e_k + 1 \end{aligned}$$

der n_i og e_i er henholdsvis antall hjørner og kanter i K_i. Legger vi sammen, får vi

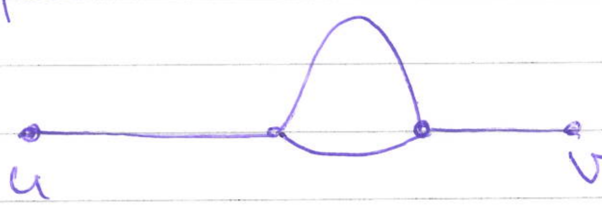
$$n = e + k$$

Siden vi også har $n = e+1$. Dermed er $k = 1$, dvs. G er sammenhengende.

En annen type karakterisering er

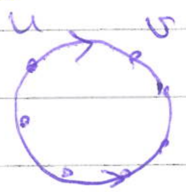
Teorem: Følgende er ekvivalent:
(i) G er et tre
(ii) For alle hjørner $u, v \in G$ finnes det nøyaktig én sti fra u til v.

Bevis: (i) ⇒ (ii) Siden G er sammenhengende, finnes det minst én sti. Anta for motsigelse at det finnes to forskjellige stier. Det må være et første sted de to stiene avviker, og et første sted etter det de kommer sammen igjen:



Dette gir opphav til en sykel (se figuren), noe som er umulig siden G er et tre.

(ii) ⇒ (i) Siden G åpenbart er sammenhengende, holder det å vise at G ikke har sykler. Anta for motsigelse at G har en sykel. Da kan vi bruke sykelen til å lage to stier mellom punkter u og v.



Her er det siste resultatet:

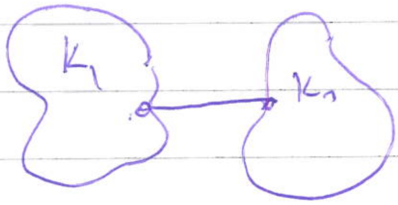
Teorem: Følgende er ekvivalent

(i) G er et tre

(ii) G har ingen sykler, men legger vi til en ny kant mellom to punkter $u, v \in G$, oppstår det en sykel

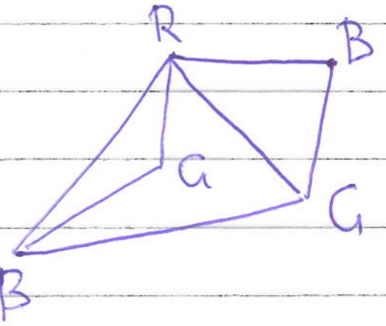
Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Vi må vise at dersom vi legger til én kant fra u til v, oppstår det en sykel. Siden G er sammenhengende, finnes det en sti fra u til v i G. Sammen med den nye kanten, danner denne en sykel

(ii) $\Rightarrow$ (i) Vi må vise at G er sammenhengende. Anta ikke, da finnes det minst to komponenter K_1, K_2. Legg til en kant mellom et punkt u i K_1 og v i K_2. Da kan den nye kanten ikke inngå i noen sykel (fjerner vi den, deler vi den nye grafen i to komponenter) og dermed kan ikke den utvidede grafen ha en sykel



Fargelegging av grafer

<u>Å fargelegge</u> en graf G betyr å gi hvert hjørne en farge slik at ingen ~~nabofarge~~ nabopunkter har samme farge.



fargelagt med tre farger

En k-fargelegging av G er en fargelegging av G som bruker k farger. Det minste antall farger som kan brukes, kalles det <u>kromatiske tallet</u> til G og betegnes med $\chi(G)$

<u>Definisjon</u>: <u>Graden</u> til et hjørne er antall kanter som går ut fra hjørnet. Graden til hjørnet u betegnes med deg(u).

<u>Setning</u>: Anta at G er en graf med e kanter. Da er

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$$

<u>Bevis</u>: Siden hver kant tilhører to hjørner, vil summen til venstre telle opp hver kant to ganger.

Teorem: Anta at hvert hjørne i en graf har grad mindre enn eller lik Δ. Da er grafen $\Delta+1$-fargeleggbar (dvs fargeleggbar med $\Delta+1$ eller færre farger)

Bevis: Ved induksjon på antall hjørner. Teoremet holder for grafer med 1 og 2 hjørner. Anta at det holder for grafer med n hjørner og anta at G har $n+1$ hjørner.

Fjern ett hjørne og de tilhørende kantene fra grafen. Per induksjonsantagelse holder resultatet for den nye grafen, og vi kan derfor fargelegge den med $\Delta+1$ eller færre farger. Naboene til det fjernede hjørnet kan ha maksimalt Δ forskjellige farger, og vi kan derfor utvide fargeleggingen til det neste hjørnet.