MAT1140 21/11-2013

Konstruksjon av rasjonale tall

Husk: Vi startet med alle par av hele tall (a,b) der $b \neq 0$, og innførte ekvivalensrelasjonen

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Notasjon: Vi betegnet ekvivalensklassen til (a,b) med $\frac{a}{b}$ og lot $\mathbb{Q}$ være mengden av alle ekvivalensklasser.

Operasjoner: Vi definerte addisjon og multiplikasjon ved

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{og} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ordning: Vi ønsket å definere ordningen $\leq$ på $\mathbb{Q}$ ved

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$$

forutsatt at vi hadde valgt representasjonene slik at $b, d > 0$. Forrige gang viste vi at denne relasjonen er veldefinert.

Setning: $\leq$ er en total ordning på $\mathbb{Q}$.

Bevis: Vi må sjekke de fire kriteriene.

(i) Refleksiv: $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$ siden $ab \leq ab$

(ii) Antisymmetri: Hvis $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ og $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, så er $ad \leq bc$ og $bc \leq ad$, og følgelig $ad = bc$. Det betyr at $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(iii) Transitiv: Hvis $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ og $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, er $ad \leq bc$ og $cf \leq de$. Ganger vi den første ulikheten med $f > 0$ og den andre med $b > 0$, får vi $adf \leq bcf$ og $bcf \leq bde$. Ved

Transitivitet er $adf \le bde$ som gir $af \le be$, dvs $\frac{a}{b} \le \frac{e}{f}$.

(iv) <u>Total</u>: Vi har $ad \le bc$, $ad = bc$ eller $ad \ge bc$, som tilsvarer $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eller $\frac{a}{b} \ge \frac{c}{d}$

<u>Positive og negative tall</u>:

$x < 0$: $\frac{a}{b} < \frac{0}{1} \Leftrightarrow a < 0$

$x > 0$: $\frac{a}{b} > \frac{0}{1} \Leftrightarrow a > 0$.

<u>Setning</u>: Anta $x \le y$. Da er $xz \le yz$ hvis $z > 0$ og $xz \ge yz$ hvis $z < 0$

<u>Bevis</u>: Sett $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, $z = \frac{e}{f}$.

<u>1</u> $z > 0$, dvs $e > 0$. Vi har $ad \le bc$ som ganget med det positive tallet ef gir $adef \le bcef$, som betyr at $\frac{ae}{bf} \le \frac{ce}{df}$.

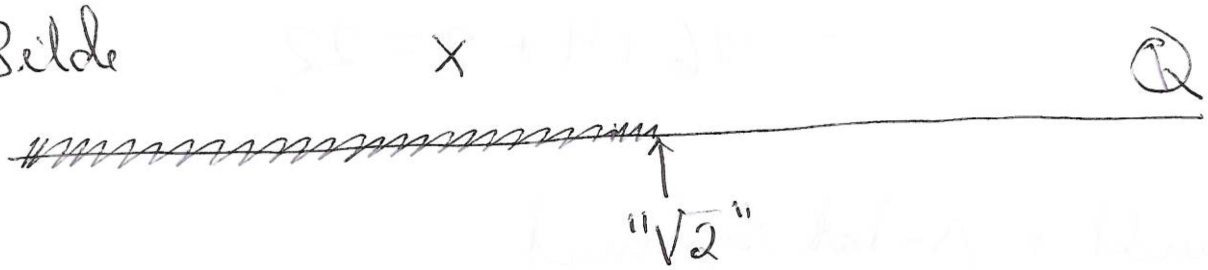
<u>2</u> $z < 0$, dvs $e < 0$. Ganger vi igjen $ad \le bc$ med det <u>negative</u> tallet ef, må vi snu ulikheten: $adef \ge bcef$, som gir $\frac{ae}{bf} \le \frac{ce}{df}$

Konstruksjon av $\mathbb{R}$ fra $\mathbb{Q}$

Vi skal nå skissere konstruksjonen av $\mathbb{R}$ fra $\mathbb{Q}$. Utgangspunktet er at $\mathbb{Q}$ som tallinje er full av hull – det er f.eks. ikke noe tall $\sqrt{2}$ som markerer lengden til diagonalen i enhetskvadratet. Selv om vi ikke kan representere $\sqrt{2}$ som et rasjonalt tall, kan vi representere det ved en mengde.

$$x = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ eller } q^2 < 2\}$$

Bilde



Legg merke til at også rasjonale tall r kan fremstilles som en slik stråle

$$y = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$$

Vi skal bygge de reelle tallene fra slike stråler – bedre kjent som Dedekindsnitt.

<u>Definisjon</u>: Et <u>Dedekindsnitt</u> er en ikke-tom, ekte delmengde x av $\mathbb{Q}$ slik at

(i) Hvis $a \in x$, så finnes det en $b \in x$ som er større enn a.

(ii) Hvis $a \in x$ og $b < a$, så er $b \in x$.

<u>Definisjon</u>: Mengden av alle Dedekindsnitt betegnes med $\mathbb{R}$. Et Dedekindsnitt kalles også et <u>reelt tall</u>

<u>Definisjon</u>: Et <u>Dedekindsnitt</u> kalles <u>rasjonalt</u> dersom det er på formen

$$X = \{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$$

for et rasjonalt tall a. Alle andre snitt kalles irrasjonale.

<u>Lemma</u>: Anta at x, y er to Dedekindsnitt. Da er enten $x \subset y$, $x = y$ eller $y \subset x$.

<u>Bevis</u>: Anta $x \neq y$. Da må det finnes et element a som er med i den ene mengden og ikke i den andre, la oss si $a \in x$. Da kan ikke noe element større enn a være med i y, for da ville a også ha vært det. På den annen side vil alle elementer mindre enn a være med i x. Altså er $y \subset x$. Vi får den omvendte inklusjonen om $a \in y$.

<u>Ordning</u>: Vi definerer en ordning $\leq$ på $\mathbb{R}$ ved $x \leq y \iff x \subseteq y$. Ifølge lemmaet ovenfor er $\leq$ en totalordning.

Hva med algebraiske operasjoner?

<u>Addisjon er enkelt.</u>

$$x+y=\{a+b : a\in x, b\in y\}.$$

Det er ikke vanskelig å vise at $x+y$ er et Dedekindsnitt og at $+$ er kommutativ og assosiativ.

Andre operasjoner er mer innviklet. For å definere multiplikasjon trenger vi først å definere negasjon, men hvordan fremstiller vi $-x$ som et Dedekindsnitt? Den naturlige ideen er at

$$-x=\{-a : a\in x\},$$

men dette er et "øvre snitt" og ikke et "nedre snitt".

Vi setter først

$$\bar{x}=\{q\in\mathbb{Q} : (q-r)\notin x \text{ for en } r\in\mathbb{Q}\}$$

og definerer så

$$-x=\{a\in\mathbb{Q} : -a\in\bar{x}\}.$$

<u>Multiplikasjon</u> definerer vi i skeg.

(i) Hvis $x,y>0$, setter vi

$$xy=\{ab : a\in x, b\in y, a,b>0\}\cup\mathbb{Q}_-$$

Vi utvider så ved å kreve de vanlige fortegnsreglene: hvis $x, y > 0$, har vi

$$-x \cdot y = -xy$$
$$(-x)(-y) = x \cdot y$$

Med disse definisjonene blir det tungvint å vise at de vanlige regnereglene gjelder – men det går an.

Hva med kompletthetsprinsippet? Det er jo først og fremst det som skiller de reelle tallene!

<u>Teorem</u>: Enhver oppad begrenset mengde i $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.

<u>Bevis</u>: Anta at A er en oppad begrenset mengde av Dedekindsnitt. Da er

$$y = \bigcup_{x \in A} x \quad \text{minste øvre skranke for } A.$$

At y er en øvre skranke er åpenbart siden $x \subseteq y$ (dvs $x \leq y$) for alle $x \in A$. For å vise at y er <u>minste</u> øvre skranke, antar vi at $z < y$. Da finnes det er rasjonalt tall a som er med i y, men ikke i z. Denne a'en må komme fra en $x \in A$. Etter et tilsvarende argument er da $x > z$, og dermed er z ikke en øvre skranke for A.