22/8-13

MAT2400

Noen viktige tautologier

(i) $\sim\sim A \Leftrightarrow A$

(ii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$

(iii) $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$

(iv) $\sim(A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$

(v) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim A \vee B)$

(vi) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Disse tautologiene kan brukes som "regneregler":

Eksempel: $\sim(A \Rightarrow B) \overset{(v)}{\Leftrightarrow} \sim(\sim A \vee B) \overset{(iv)}{\Leftrightarrow} \sim\sim A \wedge \sim B$

$\overset{(i)}{\Leftrightarrow} A \wedge \sim B$

Bemerkning: Tautologiene ovenfor utnyttes ofte i matematiske bevis. Istedenfor $A \Rightarrow B$ beviser man $\sim B \Rightarrow \sim A$, istedenfor $A \Leftrightarrow B$ beviser man $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow A$.

Tolkning av kvantorer

$$\exists x A(x) = \begin{cases} T & \text{hvis det finnes en } x \text{ slik at } A(x) \text{ er sann} \\ F & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\forall x\, A(x) = \begin{cases} T \text{ hvis } A(x) = T \text{ for } \underline{\text{alle}}\ x \\ F \text{ ellers.} \end{cases}$$

<u>Bemerkning</u>: Definisjonene ovenfor gir först mening når vi har bestemt oss for et "univers" eller "domene" som variablene löper over:

$\exists x\,(2 \cdot x = 1)$ er sann hvis domenet er $\mathbb{R}$, men gal hvis domenet er $\mathbb{N}$

$\forall x\,(x > 0)$ er sann hvis domenet er $\mathbb{N}$, men gal hvis domenet er $\mathbb{R}$.

<u>Negasjon av kvantorformler:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \sim \exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\,(\sim A(x)) \\ \sim \forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\,(\sim A(x)) \end{array}\right\}$$

Vi kan flytte negasjonen på innsiden av kvantoren om vi bytter kvantortype.

Reglene kan brukes på flere kvantorer etter hverandre

$$\sim \forall x \exists y\, A(x,y) \Leftrightarrow \exists x\,(\sim \exists y\, A(x,y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y\,(\sim A(x,y))$$

Legg merke til at dette bare er sunn fornuft: Hvis det <u>ikke</u> er slik at det for alle x finnes en y slik at $A(x,y)$ holder, så må det finnes minst en x slik $\sim A(x,y)$ holder for alle y.

<u>Bemerkning</u>: Som regel bruker ikke matematikere disse "regnereglene" til å omforme uttrykk i praksis – de benytter seg av den underliggende logikken isteden. Det er likevel verdt å vite om reglene – for å kontrollere seg selv eller behandle ekstremt kompliserte uttrykk.

For å presisere hvilke domener en kvantor løper over, er det ofte lurt å bruke <u>begrensede</u> kvantor av typen

$\forall x \in A$ "for alle x i A"

$\exists y \in B$ "det finnes en y i B"

<u>Eksempel</u>: Hvis f er en funksjon fra X til Y, så betyr

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X \; (f(x) = y)$$

at det for hver $y \in Y$ finnes en $x \in X$ slik at $f(x) = y$.

Kvantorrekkefølge

Rekkefølgen kvantorene står i er viktig. Står det to kvantorer av samme typer etter hverandre, kan vi bytte rekkefølgen uten at betydningen endres

$\exists x \exists y \, A(x,y)$ betyr det samme som $\exists y \exists x \, A(x,y)$

$\forall x \forall y \, A(x,y)$ ———— " ——— $\forall y \forall x \, A(x,y)$

Er kvantorene av forskjellig type, er imidlertid rekkefølgen viktig –

$\forall x \exists y \, A(x,y)$ og $\exists y \forall x \, A(x,y)$ betyr som regel helt forskjellige ting.

Eksempel: Anta at f er en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Da betyr

$\forall y \exists x \, (f(x)=y)$ at det til enhver y finnes en x slik at $f(x)=y$; dvs f er surjektiv

$\exists x \forall y \, (f(x)=y)$ betyr derimot at det finnes en x slik at $f(x)$ er lik alle mulige y, noe som åpenbart er absurd.

Eksempel: La $<$ være den vanlige ordningen på $\mathbb{R}$. Da er

$\forall x \exists y\,(y>x)$ sann (for alle x finnes det en y som er større)

og $\exists y \forall x\,(y>x)$ gal (det finnes ikke en y som er større enn alle x!)

La oss se litt nærmere på hva som foregår:

$\forall x \exists y\, A(x,y)$ sier at for hver x finnes det en y slik at $A(x,y)$ holder, men denne y'en kan avhenge av x. Det behøver ikke å være noen felles y som fungerer for alle x.

$\exists y \forall x\, A(x,y)$ sier at det finnes en (felles) y slik at $A(x,y)$ holder for alle x

---

Kvantorer i praksis

Kvantorer brukes implisitt i mange definisjoner. La oss se på kontinuitet i et punkt a:

For alle $\varepsilon > 0$ finnes det en $\delta > 0$ slik at når $|x-a| < \delta$ så er $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

Dette kan formaliseres slik:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} \, \overbrace{\left(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)}^{Q(x,\varepsilon,\delta)}$$

La oss se på negasjonen:

$$\neg \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} \; Q(x,\varepsilon,\delta)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \neg \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} \; Q(x,\varepsilon,\delta)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \forall \delta \in \mathbb{R}_+ \, \neg \forall x \in \mathbb{R} \; Q(x,\varepsilon,\delta)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \forall \delta \in \mathbb{R}_+ \, \exists x \in \mathbb{R} \; \neg Q(x,\varepsilon,\delta)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \forall \delta \in \mathbb{R}_+ \, \exists x \in \mathbb{R} \left(|x-a| < \delta \wedge \neg |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \forall \delta \in \mathbb{R}_+ \, \exists x \in \mathbb{R} \left(|x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \right)$$

At f ikke er kontinuerlig i a betyr altså at det finnes en $\varepsilon > 0$ slik at uansett hvilken $\delta > 0$ vi velger, så finnes det en slik at $|x-a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Igjen er ikke dette noe mer enn sunn fornuft, med det viser hvordan vi kan bruke kvantorreglene til å understøtte fornuften hvis vi er usikre

Punktvis og uniform konvergens

For å illustrere betydningen av kvantorrekkefølgen skal vi se på forskjellen mellom punktvis og uniform konvergens av en følge $\{f_n\}$ av funksjoner. Vi tenker oss at $A \subset \mathbb{R}$ og at alle funksjonene går fra A inn i $\mathbb{R}$.

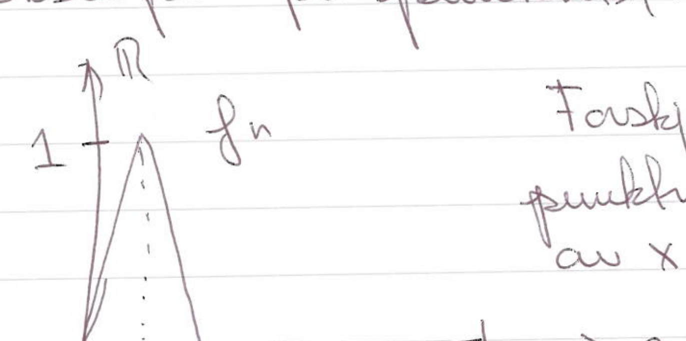
Definisjon: $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f dersom $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in A$; dvs

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Definisjon: $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq N$ så er $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ for alle $x \in A$, dvs

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in A\ [\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,]$$

Eksempel på punktvis, men ikke uniform konvergens.



Forskjell i definisjonene: I punktvis konvergens kan N avhenge av x (i tillegg til ε), i uniform konvergens må den samme N'en fungere for alle x.