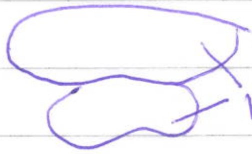
23/9 - 2013

MAT 1140

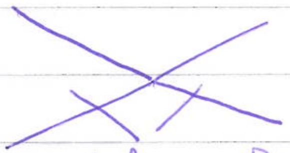
Fargelegging av planare grafer

Firefargeproblemet: Hvor mange farger trenger man for å kunne fargelegge et kart slik at to naboland aldri får samme farge?

Presiseringer: (i) Landene er sammenhengende
(ii) Land er naboer dersom de deler et grensestykke, ikke hvis de bare møtes i et punkt



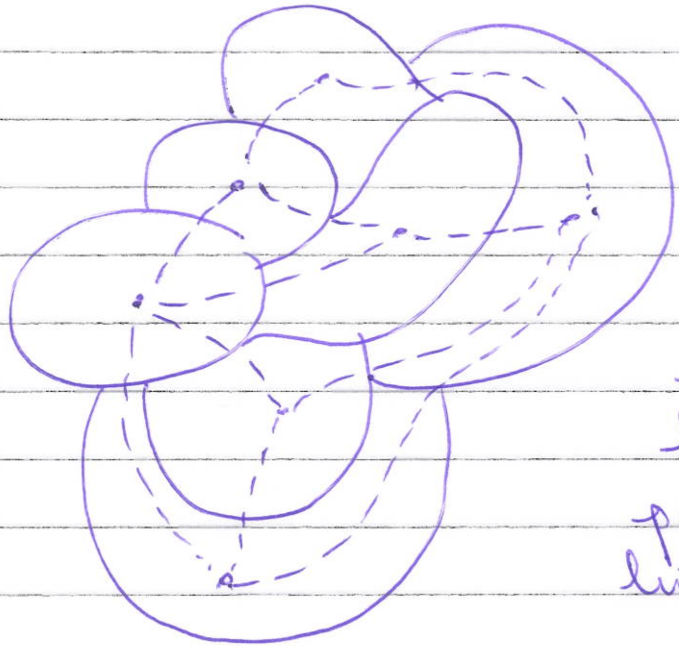
naboer



ikke naboer

Firefargeteoremet (bevist av Appel og Haken i 1977) sier at fire farger greier seg. Beviset benytter datamaskiner til å sjekke 1936 grunnleggende konfigurasjoner.

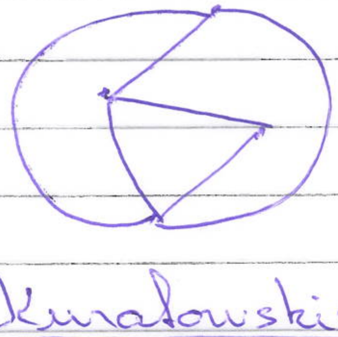
Det er en nær sammenheng mellom fargelegging av kart og fargelegging av grafer. Velg et punkt (en "hovedstad") i hvert land og trekk forbindelseslinjer mellom hovedstadene ~~som ikke skjærer hverandre~~, flekker i naboland, slik.



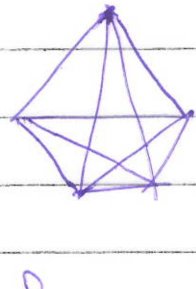
Det er alltid mulig å gjøre dette slik at forbindelseslinjene ikke skjærer hverandre. Istedenfor å fargelegge landene kan vi derfor fargelegge hovedstedene og se på grafen av forbindelseslinjer

Planare grafer

Definisjon: En graf er planar dersom den kan tegnes i planet uten at noen av kantene skjærer hverandre

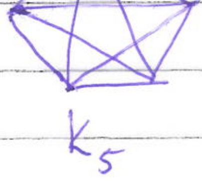


En planar graf



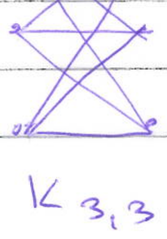
En ikke planar graf.

Kuratowskis teorem: En graf er planar hvis og bare hvis den hverken inneholder



K_5

eller

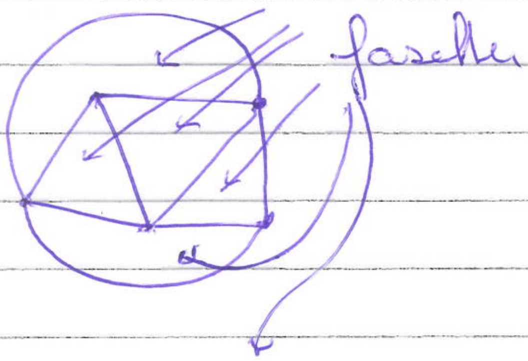


$K_{3,3}$

som delgrafer.

Kuratowskis teorem er for vanskelig til at vi skal bevise det her, men det er nyttig å vite om.

En plantegning av en graf deler planet inn i områder som kalles <u>fasetter</u>. Legge merke til at området "utenfor" grafen også regnes som en fasett.

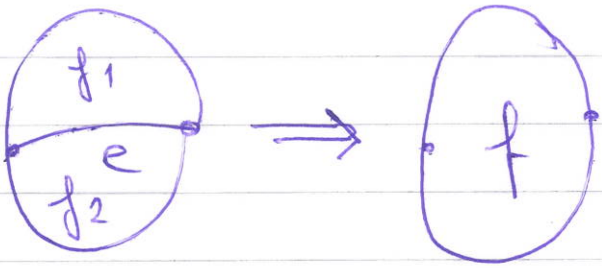


<u>Eulers formel</u>: Anta at G er en sammenhengende planar graf med v hjørner, e kanter og f fasetter. Da er

$$v - e + f = 2$$

<u>Bevisskisse</u>: Vi bruker induksjon på f.
<u>$f = 1$</u>: I dette tilfellet kan ikke G ha en sykel, og følgelig er G et tre. Det betyr at $v - e = 1$, og følgelig er $v - e + f = 2$
<u>Induksjonstrinnet</u>: Anta at resultatet holder for grafer med k fasetter, og anta at G har $k+1$ fasetter. Dette betyr G <u>ikke</u> er et tre, og følgelig har G en sykel. Fjerner vi en kant e i denne sykelen, sitter vi igjen med en sammenhengende graf G' med det samme

antall hjørner, men med en kant mindre. Den nye grafen har også én fasett mindre enn den opprinnelig siden to fasetter går sammen til én når vi fjerner en kant



f_1 og f_2 slås sammen til f når e fjernes.

Ifølge induksjonshypotesen gjelder Eulers formel $v'-e'+f'=2$ i den nye grafen. Siden $v=v'$, $e=e'+1$, $f=f'+1$, gjelder den også i den nye grafen!

$$v-e+f=2.$$

<u>Korollar</u>: Anta G er en planar graf med minst tre hjørner. Da er

$$e \leq 3v-6.$$

<u>Bevis</u>: La $d(F)$ være antall kanter som fasetten F har. Siden alle kanter grenser til to fasetter, har vi

hver fasett har minst tre kanter

$$2e = \sum_{F \text{ er en fasett}} d(F) \geq 3f = 3(e-v+2)$$

som gir $e \leq 3v-6$.

Korollar: Enhver planar graf har et hjørne med grad 5 eller lavere.

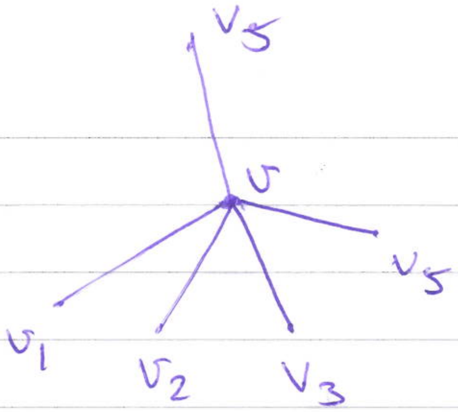
Bevis: La δ være den minste graden til et hjørne. Da er

$$\delta v \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2e \leq 6v - 12.$$

og følgelig er $\delta < 6$.

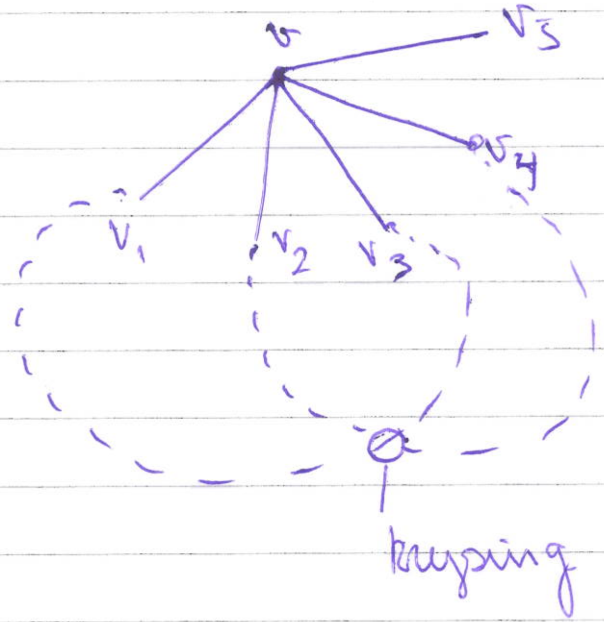
Femfargeteoremet: Enhver planar graf kan farges med fem eller færre farger.

Bevisskisse: Ved induksjon på antall hjørner. Resultatet holder åpenbart for $v=1$. Anta at det holder for alle grafer med k hjørner, og betrakt en graf G med $k+1$ hjørner. Ifølge korollaret ovenfor finnes det et hjørne v med 5 eller færre naboer. Fjerner vi dette hjørnet og alle tilhørende kanter, sitter vi igjen med en planar graf G' med k hjørner som ifølge induksjonshypotesen kan fargelegges med fem (eller færre) farger. Dersom naboene til hjørnet vårt har fire eller færre farger, kan fargeleggingen utvides til den opprinnelige grafen. Vi kan derfor konsentrere oss om tilfellet hvor hjørnet v har 5 naboer $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ med forskjellig farge. Vi antar at de er ordnet syklisk som på figuren



Se på ~~en~~ delgrafen som bare består av hjørner som har fått fargene til v_1 og v_3. Hvis v_1 og v_3 havner i hver sin komponent i denne grafen, kan vi bytte om disse to fargene i komponenten til v_1 og dermed få en fargelegging der vi kan gi v (den opprinnelige) fargen til v_1. Et tilsvarende resonnement med v_2 og v_4 viser at dersom de ~~to~~ <u>ikke</u> kan forbindes med en sti som bare består av disse to fargene, kan vi bytte farger slik at vi får en "fri" farge til v.

Det eneste tilfellet som må stå igjen er det hvor både ~~v_1 og v~~ v_1, v_3 og v_2, v_4 er forbundet av to-fargede stier, men siden slike stier må krysse hverandre, er dette umulig



Funksjoner

Uformelt er en funksjon $f: A \to B$ en "regel" som til hver $a \in A$ tilordner et element $f(a) \in B$. Hvordan kan vi formulere dette bare ved hjelp av mengder?

Husk hva vi gjorde med relasjoner:

En relasjon R på $A \times B$ er en delmengde av $A \times B$, altså en samling ordnede par (a, b) der $a \in A$, $b \in B$.

En funksjon $f: A \to B$ definerer en relasjon ved

$$aRb \iff f(a) = b.$$

Denne relasjonen utmerker seg ved at det til hver a finnes nøyaktig én $b \in B$ slik at aRb, (nemlig $b = f(a)$).

Vi bruker denne observasjonen til å gi en mengdeteoretisk definisjon av funksjoner.

Definisjon: En funksjon $f: A \to B$ er en relasjon f på $A \times B$ slik at det til hver $a \in A$ finnes nøyaktig ett element $b \in B$ slik at afb. Vi skriver $f(a)$ for dette elementet b.

Sagt på en annen måte: En funksjon $f: A \to B$ er en delmengde $f \subset A \times B$ slik at for hver $a \in A$ finnes nøyaktig én $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$.