24/9 - 2013

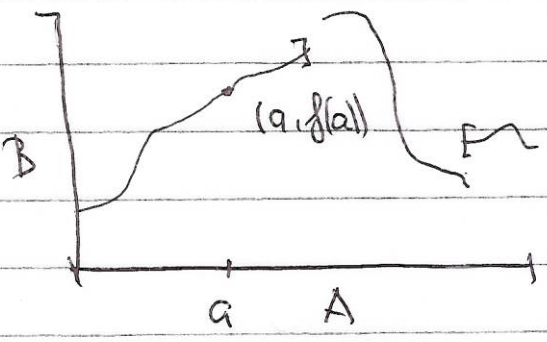
MAT 1140

Funksjoner

Minner om den "offisielle" definisjonen av funksjon.

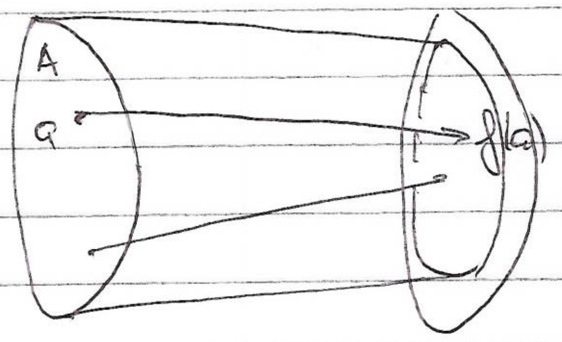
Definisjon: En funksjon f fra A til B er en delmengde av $A \times B$ slik at det til hver $a \in A$ finnes nøyaktig én $b \in B$ slik at $(a,b) \in f$. Denne b'en betegnes med $f(a)$. A kalles domenet og B kodomenet til f.

Grafisk bilde



Vi skriver $f: A \to B$ for å markere at f er en funksjon fra A til B.

Definisjon: En funksjon $f: A \to B$ kalles injektiv eller en-til-en dersom det til hver $b \in B$ finnes høyst en $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

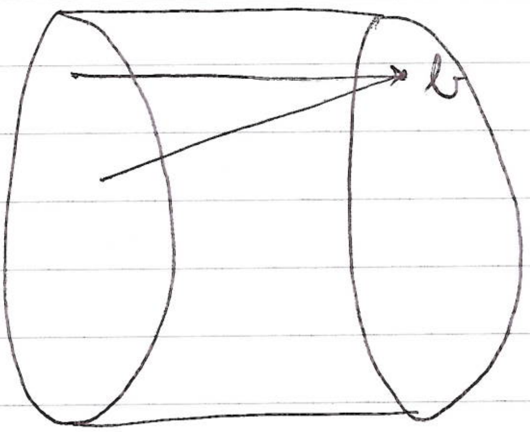


Eksempel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er ikke injektiv. Vi har f.eks

$$f(2) = 4 = f(-2)$$

<u>Reformulering</u>: f er injektiv hvis og bare hvis
$a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

<u>Definisjon</u>: $f: A \to B$ er <u>surjektiv</u> eller <u>på</u> dersom det til hver $b \in B$ finnes minst én $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

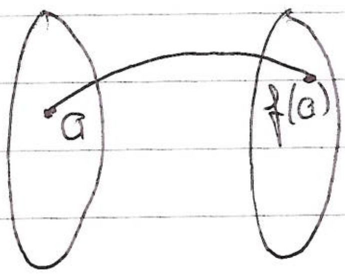


<u>Eksempel</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er <u>ikke</u> surjektiv. Det finnes f. eks ingen $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = -4$.

<u>Bevisstrategier</u>: (i) For å vise at f er injektiv, må vi vise at dersom $f(a_1) = f(a_2)$, så er $a_1 = a_2$

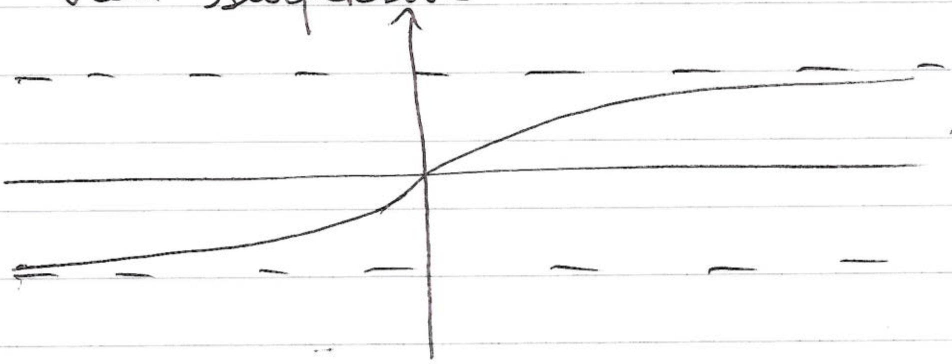
(ii) For å vise at f er surjektiv, må vi vise at for hver $b \in B$ finnes det en $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

<u>Definisjon</u>: En funksjon $f: A \to B$ kalles <u>bijektiv</u> eller en <u>entydig</u> korrespondanse dersom den er både injektiv og surjektiv; dvs dersom det til hver $b \in B$ finnes det nøyaktig én $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

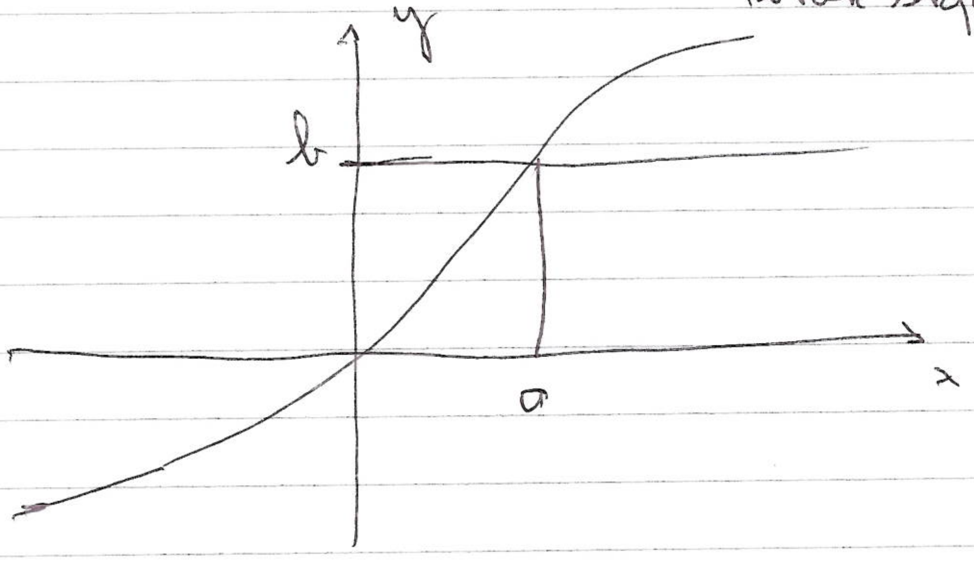


<u>Eksempler på tallinjen</u>: Vi ser på funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) strengt voksende og strengt avtagende funksjoner er injektive, men behøver ikke være surjektive

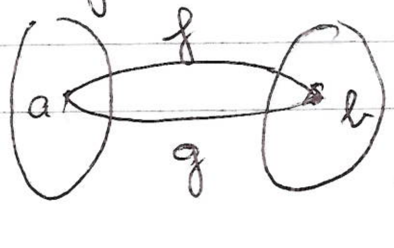


b) En kontinuerlig funksjon slik at $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ er surjektiv (bruk skjæringssetningen)



Dersom $f : A \to B$ er <u>bijektiv</u>, kan vi definere en <u>omvendt</u> eller <u>invers</u> funksjon $g : B \to A$ ved

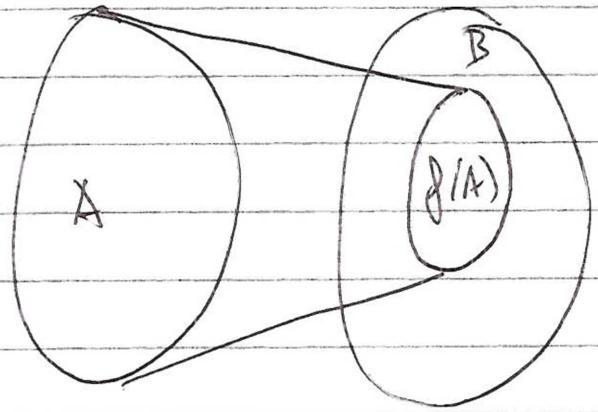
$$g(b) = a \iff f(a) = b$$



Den omvendte funksjonen betegnes ofte med f^{-1}.

Definisjon: <u>Bildet</u> eller <u>verdimengden</u> til $f: A \to B$ er mengden

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$



I noen situasjoner er det nyttig å innføre en ny funksjon $f^*: A \to f(A)$ definert ved

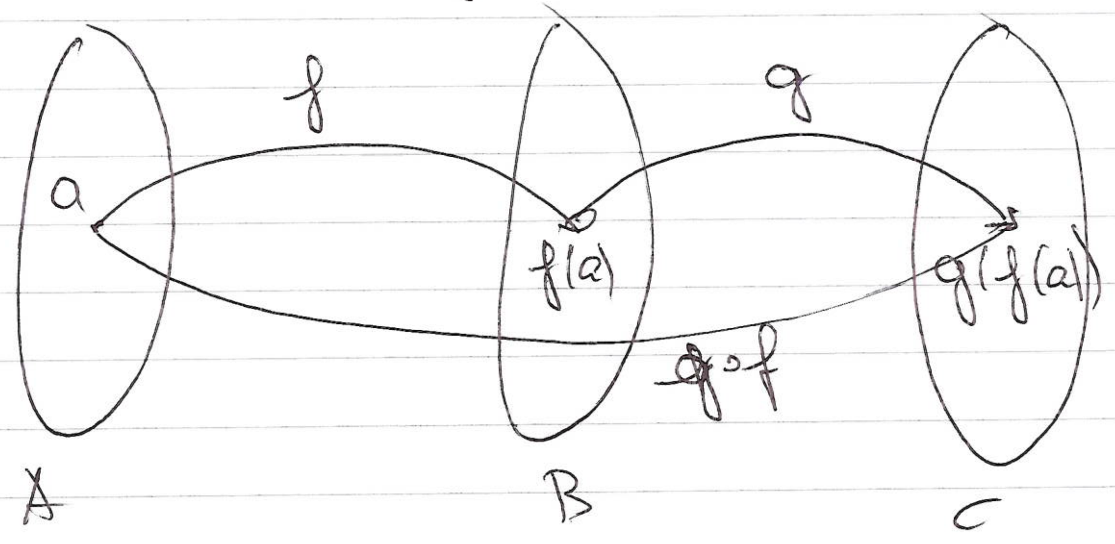
$$f^*(a) = f(a) \text{ for alle } a \in A.$$

Funksjonsverdiene er altså de samme, det eneste vi har endret er kodomenet (mengden funksjonen går inn i). Er f injektiv, blir f^* bijektiv, og dermed finnes det en omvendt funksjon $(f^*)^{-1}: f(A) \to A$.

I praksis bruker man ikke skrivemåten f^*, man bare forklarer at man tenker seg at funksjonen f har kodomene $f(A)$.

Dersom vi har to funksjoner $f: A \to B$ og $g: B \to C$, kan vi danne den <u>sammensatte</u> funksjonen $g \circ f: A \to C$ ved

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$



<u>Setning</u> (i) Hvis f og g er injektive, så er $g \circ f$ det også.

(ii) Hvis f og g er surjektive, så er $g \circ f$ det også.

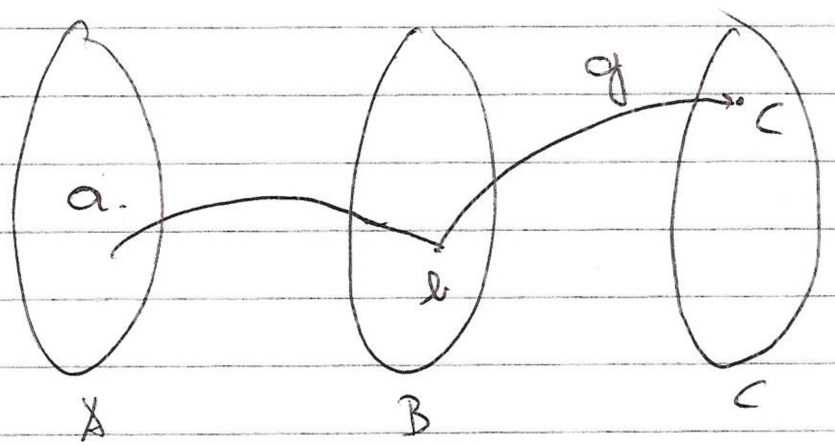
<u>Bevis</u>: (i) Anta $a_1 \neq a_2$. Siden f er injektiv, er da $f(a_1) \neq f(a_2)$, og siden g er injektiv, er $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. Dermed er $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$, og følgelig er $g \circ f$ injektiv.

(ii) Velg $c \in C$. Siden g er surjektiv, finnes det en $b \in B$ slik at $g(b) = c$. Siden f er surjektiv, finnes det en $a \in A$ slik at $f(a) = b$. Dermed $g(f(a)) = g(b) = c$. Vi har dermed vist at det finnes en $a \in A$ slik at $g \circ f(a) = c$, og følgelig er $g \circ f$ surjektiv.

Korollar: Hvis f, g er bijeksjoner, er $g \circ f$ det også.

Teorem: Dersom $f: A \to B$ og $g: B \to C$ er bijektive, så er $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Bevis: Velg en $c \in C$. Da finnes det $b \in B$ slik at $g(b) = c$ og $a \in A$ slik at $f(a) = b$

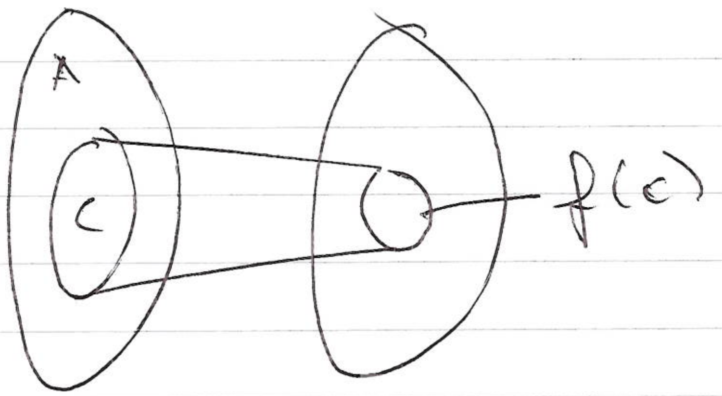


Da er $(g \circ f)(a) = c$ og følgelig $(g \circ f)^{-1}(c) = a$. Vi har også $g^{-1}(c) = b$ og $f^{-1}(b) = a$, så $(f^{-1} \circ g^{-1})(c) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = f^{-1}(b) = a$. Dette viser at $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Direkte og inverse bilder

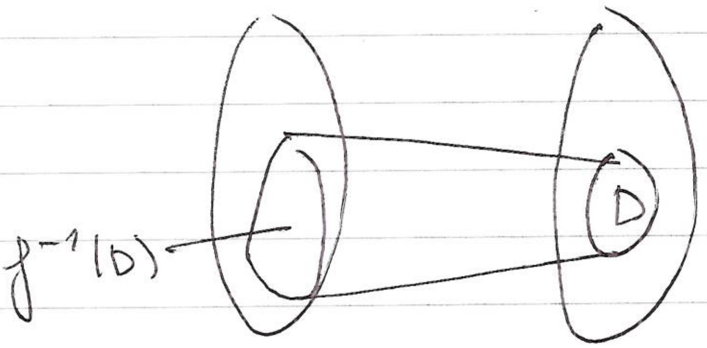
Anta at $f: A \to B$ og at $C \subset A$. Da er bildet av C under f gitt ved

$$f(C) = \{ f(x) : x \in C \}$$



Dersom $D \subset B$, er det <u>inverse bildet av D under</u> f gitt ved

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$



Legg merke til $f^{-1}(D)$ er definert selv om f ikke er invertibar.

<u>Teorem</u>: La $f: A \to B$ og la $\{D_i\}_{i \in I}$ være en familie av delmengder av B. Da er

(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i)$

(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(D_i)$

(iii) $f^{-1}(D^c) = \left(f^{-1}(D)\right)^c$

Vi ser at Booleske operasjonene kommuterer med inverse bilder.

Bevis: (i) Anta $x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} D_i)$. Da er $f(x) = \bigcup_{i \in I} D_i$,

og følgelig finnes det en i slik at $f(x) \in D_i$. Dette betyr at $x \in f^{-1}(D_i)$ og dermed er $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i)$.

Anta så at $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i)$. Da finnes det en i slik at $x \in f^{-1}(D_i)$. Dermed er

$$f(x) \in D_i \subset \bigcup_{i \in I} D_i.$$

og følgelig er $x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} D_i)$.

(ii) Overlatt til leserne!

(iii) Anta $x \in f^{-1}(D^c)$. Da er $f(x) \in D^c$ og følgelig er $f(x) \notin D$, dvs $x \notin f^{-1}(D)$. Men da er $x \in (f^{-1}(D))^c$.

Anta omvendt at $x \in (f^{-1}(D))^c$. Da er $x \notin f^{-1}(D)$, så $f(x) \notin D$. Men da er $f(x) \in D^c$, og følgelig er $x \in f^{-1}(D^c)$