MAT1140

Repetisjon

Kapittel 1: Logikk

Vi har ikke arbeidet så mye med dette stoffet, men noe bør man kunne:

Symbolene: $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\sim$ (ikke), $\Rightarrow$ (impliserer), $\Leftrightarrow$ (ekvivalent), $\forall$ (for alle), $\exists$ (det eksisterer)

Sannhetsverditabeller: f. eks for $(A \wedge B) \rightarrow \neg C$:

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg C$	$(A \wedge B) \rightarrow \neg C$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T

Formelmanipulasjon kan brukes for å vise at formler er ekvivalente:

De Morgans lover: $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$

$\sim(A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$

Distributive lover: $A \vee (B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \Leftrightarrow (A \vee B_1) \wedge \dots \wedge (A \vee B_n)$

$A \wedge (B_1 \vee \dots \vee B_n) \Leftrightarrow (A \wedge B_1) \vee \dots \vee (A \wedge B_n)$

Kvantorregler: $\sim \exists x\, A \Leftrightarrow \forall x \sim A$

$\sim \forall x\, A \Leftrightarrow \exists x \sim A.$

Eksempel: $(A \wedge \sim C) \wedge \sim (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge \sim C) \wedge (B \wedge \sim C)$

$\Leftrightarrow A \wedge \sim C \wedge B \wedge \sim C \Leftrightarrow A \wedge B \wedge \sim C.$

Kapittel 2: Mengder

Grunnleggende notasjon: $x \in A$ "x element i A"

$B \subseteq A$ "B delmengde av B"

Distributive lover: $A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$

$A \cup (B_1 \cap \dots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \dots \cap (A \cup B_n)$

De Morgans lover: $(A_1 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \dots \cap A_n^c$

$(A_1 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \dots \cup A_n^c$

Kartesiske produkter: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Potensmengder: $\mathcal{P}(A)$ = mengden av alle delmengder av A.

Eksempel fra oblig 1: $\mathcal{A}$ en algebra av delmengder av X s.a.

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) Hvis $A \in \mathcal{A}$, så er $A^c \in \mathcal{A}$

(iii) Hvis $A, B \in \mathcal{A}$, så er $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Typiske oppgaver om algebraer: Vis at
a) Hvis $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, så er $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$
b) Hvis $A, B \in \mathcal{A}$, så er $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Løsning: a) Induksjon
b) De Morgan: $A, B \in \mathcal{A} \overset{(ii)}{\Rightarrow} A^c, B^c \in \mathcal{A} \overset{(iii)}{\Rightarrow}$
$A^c \cup B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cap B)^c \in \mathcal{A} \overset{(ii)}{\Rightarrow} A \cap B \in \mathcal{A}$

Kapittel 4. Relasjoner

En <u>relasjon</u> på $A \times B$ er en delmengde R av $A \times B$. Som regel skriver vi aRb istedenfor $(a,b) \in R$.

De fleste relasjonene vi har sett på er på $A \times A$, og vi sier da at relasjonen er på A.

De viktigste relasjonene vi har sett på, er ekvivalensrelasjoner og partielle ordninger:

<u>Definisjon</u>: En relasjon $\sim$ på A er en <u>ekvivalensrelasjon</u> dersom $\sim$ er
(i) <u>Refleksiv</u>: $x \sim x$
(ii) <u>Symmetrisk</u>: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
(iii) <u>Transitiv</u>: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

En ekvivalensrelasjon induserer en partisjon på A
<u>Ekvivalens-/partisjonsklassen</u> til x:
$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Problemet med veldefinerthet: Ofte ønsker vi å definere operasjoner for ekvivalensklasser, f. eks definere

$$[x]+[y]=[x+y]$$

Da må vi først vise at operasjonen er veldefinert, dvs at den ikke avhenger av hvilke representanter x og y vi velger fra de to ekvivalensklassene. I klartekst betyr dette at vi må sjekke at hvis $x\sim x'$ og $y\sim y'$, så er $x+y\sim x'+y'$.

Definisjon: En relasjon $\leq$ på A er en partiell ordning dersom den er:

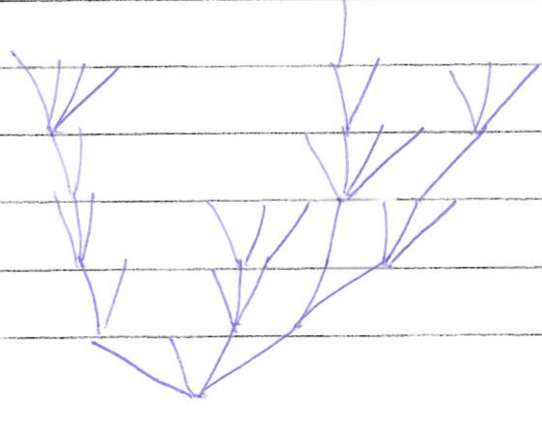
(i) Refleksiv: $x\sim x$

(ii) Antisymmetrisk: Hvis $x\leq y$ og $y\leq x$, så er $x=y$.

(iii) Transitiv: Hvis $x\leq y$ og $y\leq z$, så er $x\leq z$

Ordningen er total dersom vi for alle elementer x, y har enten $x\leq y$ eller $y\leq x$. Hvis ordningen ikke er total, finnes det ikke-sammenlignbare elementer slik at vi hverken har $x\leq y$ eller $y\leq x$.

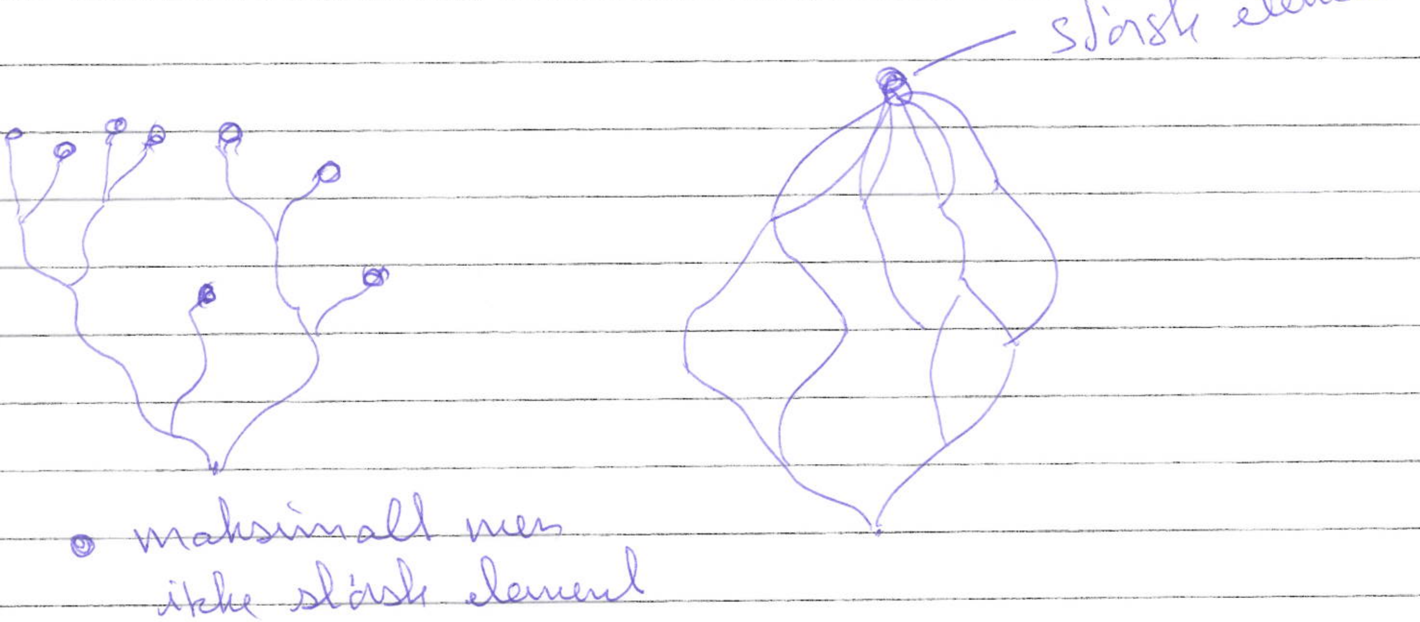
Partielle ordninger kan noen ganger illustreres med trær:



Definisjon: x er et maksimalt element for en ordning $\leq$ dersom det ikke finnes noe element y slik at $x \leq y$. x er et største element dersom $y \leq x$ for alle andre elementer y.

Logisk sammenheng: Et største element er alltid et maksimalt element, men et maksimalt element behøver ikke være et største element. Det er høyst ett største element, men det kan godt være flere maksimale elementer.

Bilder

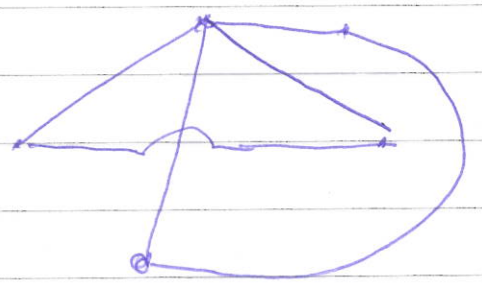


Definisjon: En kjede C er en totalt ordnet delmengde av en partiell ordnet mengde. (dvs hvis $x, y \in C$, er enten $x \leq y$ eller $y \leq x$).

Zorns lemma: Dersom enhver kjede i $(A, \leq)$ har en øvre skranke, har A et maksimalt element

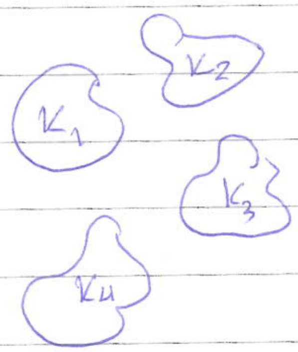
Grafer

En graf $G=(V,E)$ består av hjørner (i V) og kanter (i E) som forbinder hjørner:

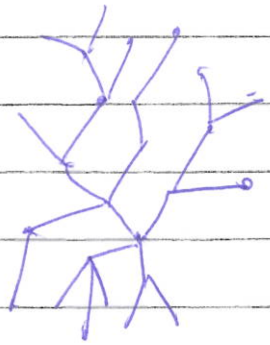


En vandring fra u til v: $u \to u_1 \to u_2 \to \dots u_{n-1} \to u$
Den kalles en sti dersom hjørnene $u, u_1, u_2, \dots u$ er forskjellige.
En sykel er en vandring $u \to u_1 \to u_2 \to \dots \to u_{n-1} \to u$ der $u, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ er forskjellige og lengden er minst 3.

G er sammenhengende dersom alle punkter u,v kan forbindes med en sti. En usammenhengende graf kan dekomponeres i sammenhengende komponenter:



Definisjon: Et tre er en sammenhengende graf uten sykler.



Enhver sammenhengende graf har et utspennende tre, dvs et tre som har de samme hjørnene og noen av de samme kantene. Man får treet fra grafen ved å fjerne kanter i sykler inntil det ikke er flere sykler igjen.

Teorem: Følgende er ekvivalent for en graf G

(i) G er et tre

(ii) G er sammenhengende og $n = e + 1$

(iii) G er ~~[illegible]~~ sykelfri og $n = e + 1$

(iv) For alle hjørner u, v finnes det nøyaktig én sti som forbinder u og v.

Definisjon: En planar graf er en graf som kan tegnes i planet uten at kanter skjærer hverandre.

Eulers formel for planare grafer

$$n - e + f = 2$$

Idé: Fjerner én og én kant til vi har et tre. Da er $n - e + 1 = 2$. Underveis har vi fjernet like mange kanter som fasetter.