27/8 - 13

MAT1140

Mengder

En mengde er en endelig eller uendelig samling av matematiske objekter, f.eks tall, vektorer, linjer, funksjoner osv. Objektene som utgjör mengden kalles elementene i mengden. Vi bruker krøllparenteser { og } til avgrense elementene i en mengde

Eksempel: $A = \{2,3,6,9\}$ = mengden som har elementene 2, 3, 6, 9

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ = mengden av naturlige tall.

Vi bruker $x \in A$ for å betegne at x er element i mengden A og $x \notin A$ til å betegne at x ikke er element i A. Hvis A er som ovenfor, har vi altså

$$3 \in A \quad \text{og} \quad 4 \notin A$$

For mer kompliserte mengder bruker vi ofte beskrivelser av typen

$A = \{x : P(x)\}$ = mengden av alle x som tilfredsstiller betingelsen $P(x)$

eller

$$A = \{ x \in B : P(x) \} = \text{mengden av alle elementer i } B \text{ som tilfredsstiller betingelsen } P(x)$$

Noen ganger bruker vi $|$ istedenfor $:$, f.eks.

$$A = \{ x \in B \mid P(x) \}$$

Om vi bruker $:$ eller $|$ er bare en smakssak

Eksempel: Hvis $A = \{2, 3, 6, 9\}$, så er

$$B = \{ x \in A : x > 5 \} = \{6, 9\}$$

Noen sentrale mengder:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ = mengden av naturlige tall

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ = mengden av hele tall

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$ = mengden av rasjonale tall

$\mathbb{R}$ = mengden av reelle tall

$\mathbb{C} = \{ a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}$ = mengden av komplekse tall

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ = mengden av alle punkter i planet

$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$ = mengden av alle punkter i rommet

$\emptyset$ = den tomme mengden = mengden uten elementer

To mengder er <u>like</u> dersom de har nøyaktig de samme elementene. For å vise at $A = B$ må vi vise at ethvert element i A også er et element i B, og at ethvert element i B også er et element i A. Med andre ord

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

og

$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

I noen tilfeller kan vi vise direkte at

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B,$$

men det vanligste er å dele det opp i de to implikasjonene ovenfor

Vi sier at A er en <u>delmengde av</u> B

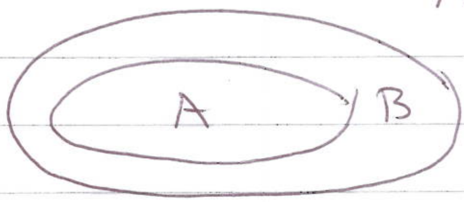
og skriver $A \subset B$ dersom ethvert element i A er et element i B (men ikke nödvendigvis omvendt). For å vise at $A \subset B$, må vi vise at

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Legg merke til at $A = B$ hvis og bare hvis $A \subset B$ og $B \subset A$.

<u>Grafisk fremstilling</u>:

$A \subset B$

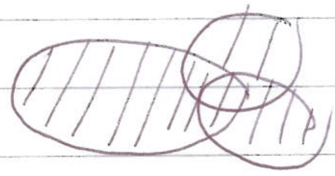


<u>Eksempel</u>: $\{2,3,4\} \subset \mathbb{N}$

<u>Boolske operasjoner</u>

<u>Union</u>: Anta at $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er mengder. Da er union definert ved

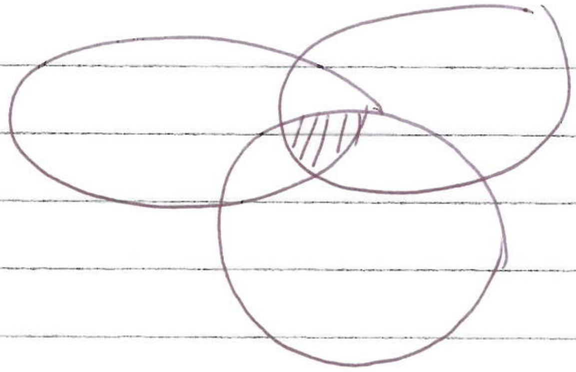
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : x \text{ er med i } \underline{\text{minst en}}\ A_i\}$$



Unionen av tre mengder.

<u>Snitt</u>: Snittet av $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er definert ved

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x : x \text{ er med i } \underline{\text{alle}}\ A_i\}$$



Snittet av tre mengder.

Forkortet notasjon: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

De distributive lover: For alle mengder B, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ har vi

(i) $B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$

(ii) $B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$

Bevis for (i): Anta först at

$$x \in B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

Da er $x \in B$ og $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$, dvs $x \in B$ og $x \in A_i$ for minst én i. Men dermed er $x \in B \cap A_i$, og følgelig

$$x \in (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

Anta så at

$$x \in (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

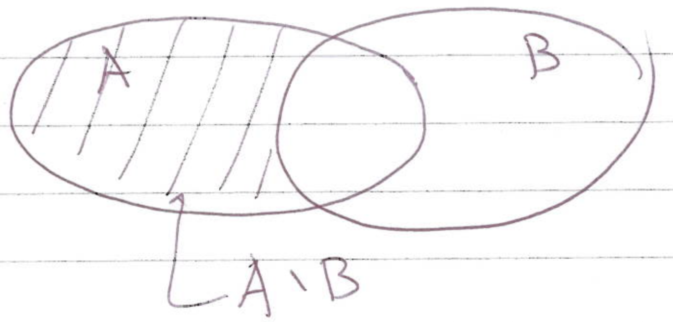
Da er $x \in B \cap A_i$ for (minst) én i, dvs $x \in B$ og $x \in A_i$. Dermed er $x \in B$ og $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, og følgelig

$$x \in B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

(ii) overlates til oppgavene (teknikken er den samme)

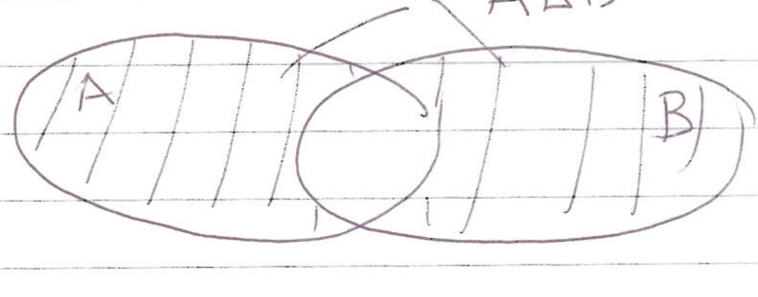
<u>Definisjon</u>: Hvis A og B er to mengder, definerer vi den (mengdeteoretiske) <u>differansen</u> ved

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$



Den symmetriske differansen er

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

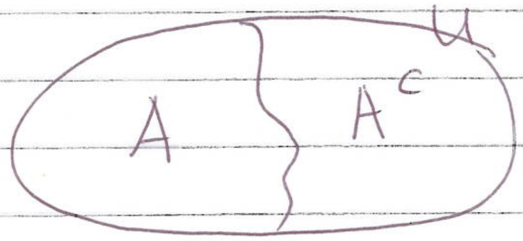


Ofte er alle mengdene vi er interessert i delmengder av en grunnmengde eller univers U. Er vi f.eks interessert i mengder av reelle tall, er $U = \mathbb{R}$, er vi interessert i mengder av punkter i planet, er $U = \mathbb{R}^2$.

Vi antar nå at vi har bestemt oss for et univers U og alle mengder vi nevner er delmengder av U.

Definisjon: Komplementet A^c til en mengde A er definert ved

$$A^c = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$$



De Morgans lover:

(i) $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c$

(ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c$

Bevis (i) Anta først at $x \in (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c$. Da er $x \notin A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, så $x \notin A_i$ for alle i. Men da må $x \in A_i^c$ for alle i, og dermed

$$x \in A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c$$

Anta så at $x \in A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c$. Da er $x \in A_i^c$ for alle i, dvs $x \notin A_i$ for alle i. Dermed er $x \notin A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, med andre ord

$$x \in (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c.$$

Hittil har vi sett på <u>endelig</u> familier av mengder: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ofte har vi bruk for <u>uendelige</u> familier.

<u>Eksempel</u>: Alle intervallene $[0, \frac{1}{n}]$ der n er et naturlig tall, danner en uendelig familie som vi betegner med $\{[0, \frac{1}{n}]\}_{n \in \mathbb{N}}$

Mengden av alle sirker

$$C_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$$

om origo danner en familie

$$\{C_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$$

der $\mathbb{R}_+$ er mengden av alle positive reelle tall.

<u>Definisjon</u>: Anta at I er en mengde og vi har en mengde A_i for hver $i \in I$. Da kaller vi $\{A_i\}_{i \in I}$ en indeksert familie av

mengder.

Vi definerer snitt og union av indekserte mengder på den naturlige måten

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \text{ er med i } \underline{\text{alle}}\ A_i,\ i \in I\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \text{ er med i minst én } A_i,\ i \in I\}$$

De distributive lovene gjelder fortsatt:

(i) $B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

(ii) $B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

Det samme gjør De Morgans lover

(i) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

(ii) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$.