1/10-2013

MAT1140

Direkte og inverse bilder

Husk: Hvis $f: A \to B$, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$, så er

$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$ (direkte bilde)

$f^{-1}(D) = \{x : f(x) \in D\}$ (invers bilde)

Forrige gang:
(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(D_i)$
(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(D_i)$
(iii) $f^{-1}(D^c) = \left(f^{-1}(D)\right)^c$

Inverse bilder kommuterer med Boolske operasjoner

Setning: Anta at $f: A \to B$ og at $\{C_i\}_{i\in I}$ er en familie av delmengder av A. Da er

(i) $f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(C_i)$

(ii) $f\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(C_i)$

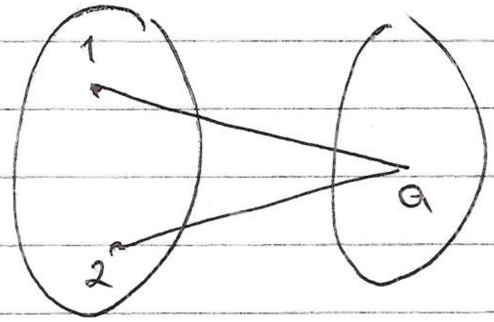
Bevis: (i) Anta at $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$. Da er $y = f(x)$ for en $x \in \bigcup_{i\in I} C_i$. Det finnes en $i \in I$ slik at $x \in C_i$, og følgelig er $y \in f(C_i)$. Dette medfører at $y \in \bigcup_{i\in I} f(C_i)$.

Anta så at $y \in \bigcup_{i\in I} f(C_i)$. Da finnes det en $i \in I$ slik at $y \in f(C_i)$, og dermed er det en $x \in C_i \subset \bigcup_{i\in I} C_i$ slik at $f(x) = y$. Dermed er

$y \in f(\bigcup_{i\in I} C_i)$.

(ix) Anta $y \in f(\bigcap_{i\in I} C_i)$. Siden $\bigcap_{i\in I} C_i \subset C_i$ for alle $i \in I$, er dermed $y \in f(C_i)$ for alle $i \in I$, dvs $y \in \bigcap_{i\in I} f(C_i)$.

Eksempel: Her er et eksempel på $f(\bigcap_{i\in I} C_i) \neq \bigcap_{i\in I} f(C_i)$:



$f(\{1\}) \cap f(\{2\}) = \{a\}$

$f(\{1\} \cap \{2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$

Setning: Hvis f er injektiv, så er $f(\bigcap_{i\in I} C_i) = \bigcap_{i\in I} f(C_i)$ for alle familier $\{C_i\}_{i\in I}$.

Bevis: Det gjenstår å vise at $\bigcap_{i\in I} f(C_i) = f(\bigcap_{i\in I} C_i)$.

Anta $y \in \bigcap_{i\in I} f(C_i)$. Da er $y \in f(C_i)$ for hver $i \in I$; dvs det finnes en $x_i \in C_i$ slik at $y = f(x_i)$. Siden f er injektiv, er alle x_i-ene det samme elementet x, og følgelig er $x \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Siden $y = f(x)$, betyr dette at $y \in f(\bigcap_{i\in I} C_i)$.

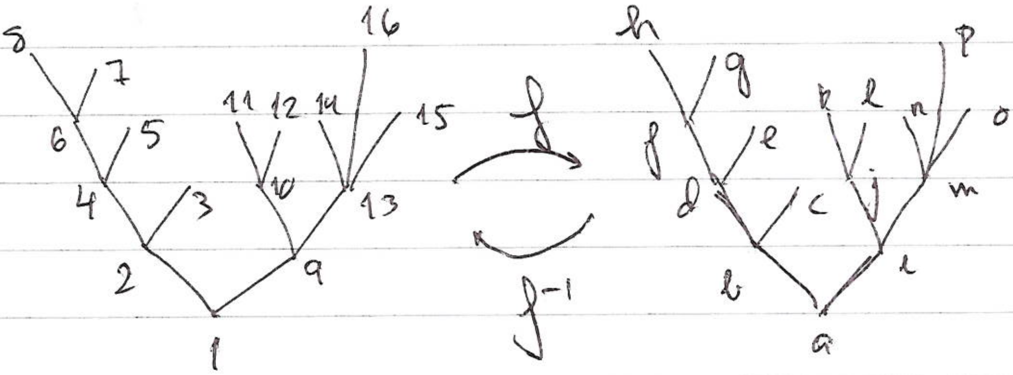
Ordningsisomorfier

Funksjoner brukes ofte til å sammenligne strukturer av samme type. Vi skal se litt på hvordan dette fungerer for ordninger.

Definisjon: Anta at $(A, \leq_A)$ og $(B, \leq_B)$ er to partielle ordninger. En funksjon $f: A \to B$ kalles *ordningsbevarende* dersom

$$x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)$$

Vi sier at f er en *ordningsisomorfi* dersom den er ~~[illegible]~~ bijektiv og både f og f^{-1} er ordningsbevarende.



Binære operasjoner

En *binær operasjon* på en mengde A er en funksjon $f: A \times A \to A$. Vi skriver gjerne $a * b$ (der $*$ er et eller annet symbol) istedenfor

$f(a,b)$.

Eksempler: Binære operasjoner på $\mathbb{R}$
(i) $a+b$
(ii) $a-b$
(iii) $a\cdot b$

Andre eksempler: prikkprodukt, kryssprodukt, matriseprodukt, snitt, union.

Definisjon: En binær operasjon $*$ på A kalles
(i) Kommutativ dersom $a*b = b*a$ for alle $a,b\in A$
(ii) Assosiativ dersom $(a*b)*c = a*(b*c)$ for alle $a,b,c\in A$.

En annen binær operasjon $\dagger$ kalles distributiv over $*$ dersom $a\dagger(b*c) = (a\dagger b)*(a\dagger c)$.

Definisjon: Anta at $*_A$ er en binær operasjon på A og $*_B$ er en binær operasjon på B. En isomorfi mellom $(A,*_A)$ og $(B,*_B)$ er en bijektiv funksjon $f: A\to B$ slik at

$$f(a*_A b) = f(a) *_B f(b) \text{ for alle } a,b\in A$$

Eksempel: $\ln: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er en isomorfi mellom $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ og $(\mathbb{R},+)$ ved

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Følger

Vanligvis tenker vi på en følge fra en mengde A som en uendelig sekvens

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

av elementer i A, men formelt er en følge en funksjon

$$a : \mathbb{N} \to A$$

— vi skriver bare a_n istedenfor $a(n)$

Vanlige måter å definere følger på:
(i) Eksplisitt formel: $a_n = 2^n$
(ii) ~~Implisitt~~ Rekursiv definisjon: a_0, $a_{n+1} = f(a_n)$
der f er en gitt funksjon.
Mer generelt: $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ gitt,
$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ for $n \geq k$.

Eksempel: Fibonacci-tallene: $a_0 = a_1 = 1$,
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Anta at vi har en følge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \ldots$$

og at vi plukker ut noen av leddene

f. eks

$$a_2, a_4, a_7, a_9, \dots$$

Da får vi en *delfølge* av $\{a_n\}$.

Mer formelt: Anta at $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots$ er en strengt voksende følge av naturlige tall. Da kalles $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ en *delfølge* av $\{a_n\}$.

Teorem: Enhver begrenset delfølge av $\mathbb{R}$ har en monoton delfølge.

Bevis: Kall x_N en *spiss* dersom $x_N \geq x_k$ for alle $k \geq N$. Dersom det finnes uendelig mange spisser $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \dots$ utgjør de en avtagende delfølge. Dersom det bare finnes endelig mange, finnes det en siste spiss x_{N_k}. Siden $x_{N_k+1} = x_{n_1}$ ikke en spiss, finnes det et element x_{n_2}, $n_2 > n_1$, slik at $x_{n_2} > x_{n_1}$. Siden x_{n_2} ikke er en spiss, finnes det en $n_3 > n_2$ slik at $x_{n_3} > x_{n_2}$. Fortsetter vi på denne måten, får vi en (strengt) voksende følge $\{x_{n_i}\}$