31/10 - 2013

MAT1140

Kardinalitet

Vi skal nå studere størrelsen til mengder. Vi har et godt grep på størrelsen ("antall elementer i") endelige mengder, og vi skal nå prøve å utvide denne intuisjonen til uendelige mengder.
La oss begynne nedenfra:

Definisjon: Anta at n er et naturlig tall. Vi sier at en mengde A har n elementer eller kardinalitet n dersom det finnes en bijeksjon $f: \{1,\dots,n\} \to A$. Den tomme mengden $\emptyset$ er den eneste mengden med 0 elementer (kardinalitet 0).

Vi sier at en mengde er endelig dersom den har kardinalitet $0,1,2,3,\dots$

Hvis A har kardinalitet n, skriver vi $n = \text{card}\, A$ eller $n = |A|$

Vi gjør en enkel, men viktig observasjon:

Setning: To endelige mengder A og B har ~~[illegible]~~ samme kardinalitet hvis og bare hvis det finnes en bijeksjon $f: A \to B$.

Bevis: Anta at A og B har samme kardinalitet n. Da finnes det bijeksjoner $f: \{1, 2, \dots, n\} \to A$, $g: \{1, 2, \dots, n\} \to B$, og dermed er $g \circ f^{-1}: A \to B$ en bijeksjon.

Anta så at det finnes en bijeksjon $h: A \to B$ og at A har kardinalitet n. Da finnes det en bijeksjon $f: \{1, 2, \dots, n\} \to A$, og følgelig $h \circ f: \{1, 2, \dots, n\} \to B$ en bijeksjon.

Vi skal bruke dette resultatet til å utvide kardinalitetsbegrepet til uendelige mengder.

Definisjon: Vi sier at to mengder A og B er *likemektige* eller *har samme kardinalitet* dersom det finnes en bijeksjon $f: A \to B$.

Endelig mengder er aldri likemektige med delmengder av seg selv. Dette gjelder ikke for uendelige mengder.

Eksempel (Galileis paradoks) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ er likemektig med mengden $K = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ siden $\varphi: \mathbb{N} \to K$, der $\varphi(n) = n^2$, er en bijeksjon.

Notasjon: Dersom A og B har samme kardinalitet, skriver vi $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$, selv om det på dette stadiet ikke er klart hva $\operatorname{card} A$ egentlig er.

Setning: Anta at A, B, C er tre mengder. Da gjelder

(i) $\text{card}\, A = \text{card}\, A$

(ii) $\text{card}\, A = \text{card}\, B \Rightarrow \text{card}\, B = \text{card}\, A$

(iii) Hvis $\text{card}\, A = \text{card}\, B$ og $\text{card}\, B = \text{card}\, C$, så er $\text{card}\, A = \text{card}\, C$

Vi har også en naturlig ordningsrelasjon på mengder.

<u>Definisjon</u>: Vi skriver $\text{card}\, A \leq \text{card}\, B$ dersom det finnes en <u>injektiv</u> avbildning $f: A \to B$.

Noen enkle observasjoner:

(i) $\text{card}\, A \leq \text{card}\, A$

(ii) Hvis $B \subset A$, så $\text{card}\, B \leq \text{card}\, A$

(iii) Hvis $\text{card}\, A = \text{card}\, B$, så $\text{card}\, A \leq \text{card}\, B$

(iv) Hvis $\text{card}\, A \leq \text{card}\, B$ og $\text{card}\, B \leq \text{card}\, C$, så er $\text{card}\, A \leq \text{card}\, C$

Det naturlige spørsmålet er:

Hvis $\text{card}\, A \leq \text{card}\, B$ og $\text{card}\, B \leq \text{card}\, A$, er da $\text{card}\, A = \text{card}\, B$?

Dette spørsmålet er faktisk ganske vanskelig og vi skal utsette det en stund.

Tellbare mengder

Vi skal nå se på enkleste uendelige mengdene.

Definisjon: En mengde A kalles tellbart uendelig dersom den er likemektig med $\mathbb{N}$, dvs dersom det finnes en bijeksjon

$$f: \mathbb{N} \to A.$$

En mengde er tellbar dersom den er enten tellbar uendelig eller endelig.

Setning: En mengde A er tellbar hvis og bare hvis det finnes en følge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ som inneholder alle elementene i A.

Bevis: Anta først at A er tellbar. Hvis $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ er endelig, er $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_n, b_n \ldots$ en følge som inneholder alle elementene i A. Dersom A er tellbart uendelig, finnes det en bijeksjon $f: \mathbb{N} \to A$, og dermed er $\{f(n)\}$ en følge som inneholder alle elementene i A.

Anta så at $\{a_n\}$ er følge som inneholder alle elementene i A. Vi definerer en funksjon g ved

$g(1)$ = den første j slik at $a_j \in A$

$g(2)$ = den første $j > g(1)$ slik at $a_j \in A \setminus \{a_{g(1)}\}$

$g(3)$ = den første $j > g(2)$ slik at $a_j \in A \setminus \{a_{g(1)}, a_{g(2)}\}$

osv så lenge vi finner nye elementer

Hvis prosessen stopper opp etter $a_{g(n)}$ (fordi det ikke finnes flere elementer, er $h: \{1, \dots, n\} \to A$ gitt ved $h(i) = a_{g(i)}$ en bijeksjon som viser at A er endelig.

Hvis prosessen ikke stopper opp, er $h: \mathbb{N} \to A$ gitt ved $h(i) = a_{g(i)}$ en bijeksjon som viser at A er tellbart uendelig.

Setning: En delmengde av en tellbar mengde er tellbar.

Bevis: Anta at A er tellbar og $B \subset A$. Det finnes en følge $\{a_n\}$ som inneholder alle elementer i A og dermed alle elementer i B.

Det neste resultatet er mer overraskende

Teorem: Anta at A og B er tellbare. Da er $A \times B$ også tellbar.

Bevis: La $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge som

som inneholder alle elementer i A og $\{b_n\}$ er en følge som inneholder alle elementer i B. Da er

$$\underbrace{(a_1,b_1)}_{\text{indekssum } 1},\ \underbrace{(a_1,b_2),(a_2,b_1)}_{\text{indekssum } 2},\ \underbrace{(a_1,b_3),(a_2,b_2),(a_3,b_1)}_{\text{indekssum } 3},\ldots$$

en følge som inneholder alle elementer i $A \times B$

<u>Teorem</u>: Mengden av rasjonale tall er tellbar.

<u>Bevis</u>: Vi har

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Siden $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$ er tellbare, er $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ det også, og følgelig finnes det en følge $\{(m_k, n_k)\}$ som inneholder alle elementene i $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Da vil følgen $\{\frac{m_k}{n_k}\}$ inneholde alle rasjonale tall

<u>Teorem</u>: Unionen av en tellbar familie $\{A_n\}$ av tellbare mengder er tellbar.

Bevis: Vi kan liste opp elementene i hver av mengdene A_n:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\}$$

Da er $\{\underbrace{a_{11}}, \underbrace{a_{12}, a_{21}}, \underbrace{a_{13}, a_{22}, a_{31}}, \underbrace{a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}}, \dots$

sekvenser med samme indekssum

en opplisting av $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$