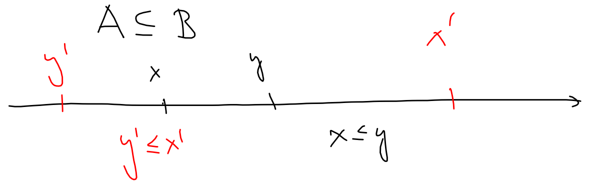
Ordninger

Eksempler: a) $\mathbb{R}$ $x \le y$ "x mindre enn eller lik y"

b) X - ikke tom mengde. Ordner $\mathcal{P}(X)$ ved

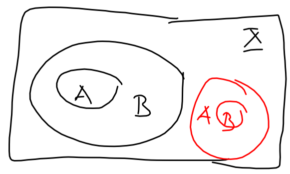
$$A \subseteq B$$

Forskjell: a)



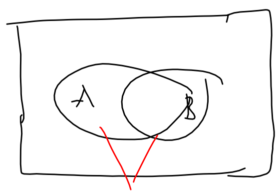
Total ordning

b)



$A \subseteq B$

$B \subseteq A$



$A \not\subseteq B$

$B \not\subseteq A$

partiell ordning.

ikke sammenlignbare.

Definisjon: En partiell ordning på en mengde X er en relasjon $\le$ på X slik at:

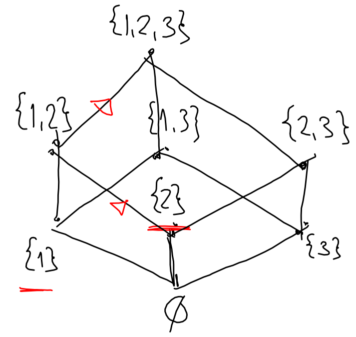
(i) Refleksiv: $x \le x$ for alle $x \in X$.

(ii) Antisymmetri: Hvis $x \le y$ og $y \le x$, så er $x = y$.

(iii) Transitiv: Hvis $x \le y$ og $y \le z$, så er $x \le z$.

Dersom vi for alle $x, y \in X$ har enten $x \le y$ eller $y \le x$, så kalles ordningen total. Hvis vi hverken har $x \le y$ eller $y \le x$, så sier vi at x og y er ikke sammenlignbare.

Eksempel: $X = \{1,2,3\}$ ordnet ved $\subseteq$.

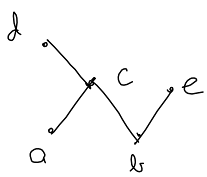


$\{2\} \subseteq \{1,2,3\}$, $\{1,2\}$ og $\{2,3\}$ er ikke sammenlignbare.

Hasse-diagrammer.

Hasse diagrammet definerer ordningen. $X = \{a,b,c,d,e\}$

Ordningen er



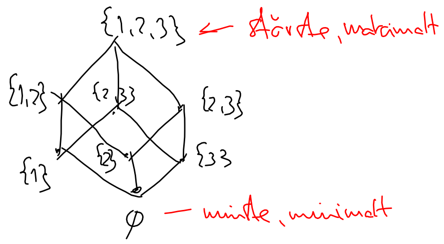
$$\le = \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(b,e),(c,c),(c,d),(d,d),(e,e)\}$$

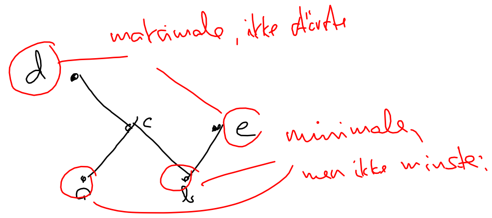
Største, minste, maksimale og minimale elementer

Def: Vi skriver $a < b$ dersom $a \leq b$ og $a \neq b$.

b er

- et største element dersom $b \geq a$ for alle $a \in X$
- et minste element dersom $b \leq a$ for alle $a \in X$
- et maksimalt element dersom det ikke finnes noen $a \in X$ slik at $a > b$.
- et minimalt element dersom det ikke finnes noen $a \in X$ slik at $a < b$.





Setning: En partiell ordning kan høyst ha ett største og ett minste element.

Bevis: Anta at x, y begge er største elementer. Da er $x \geq y$ (siden x er et største element) og $y \geq x$ (siden y er et største element). Ved antisymmetri er da $x = y$.

Setning: Et største element er alltid et maksimalt element og et minste element er alltid et minimalt element.

Bevis: Anta at dette ikke gjelder, da må det finnes et største element x som ikke er maksimalt. Siden x ikke er maksimalt, finnes det da en a slik at $a > x$ (dvs $a \geq x$ og $a \neq x$). Siden x er et største element, må $x \geq a$. Dermed har vi $\underbrace{a \geq x \text{ og } x \geq a}_{\Downarrow\; x = a}$ og $a \neq x$, som er en selvmotsigelse.

Eksempel: Definer en relasjon $\leq$ på $\mathbb{N}$ ved

$a \leq b$ dersom b er delelig med a $\Rightarrow b = na$ for et helt tall n

Dette er en partiell ordning

(i) Refleksiv: $a \leq a$ (ja $a = 1 \cdot a$)

(ii) Antisymmetri: Anta $a \leq b$ og $b \leq a$. Da er $a = b$.

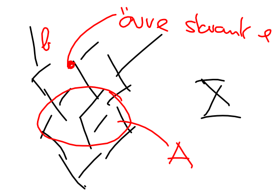
(iii) Transitiv: Anta at $a \leq b$ og $b \leq c$, vil da $a \leq c$?

$\underbrace{b = na \quad c = kb}_{\text{hele tall}} \Rightarrow c = kb = k(na) = \underbrace{(kn)}_{\text{hele tall}}a \Rightarrow a \leq c.$

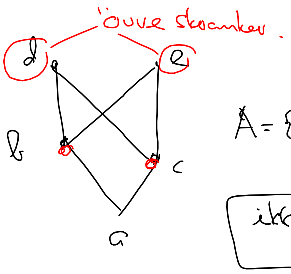
Minste øvre skranke

Motivasjon

Anta at $\leq$ er en partiell ordning på X og at $A \subseteq X$



Vi sier at b er en øvre skranke for A dersom $b \geq a$ for alle $a \in A$. Vi sier at b er en minste øvre skranke dersom $b \leq c$ for alle andre øvre skranker.



$A = \{b, c\}$

Vi sier at ordningen har den minste øvre skranke egenskapen dersom enhver ikke-tom mengde som har en øvre skranke har en minste øvre skranke. Eksempel: $\mathbb{R}$.

Tilsvarende sier vi at ordningen har den største nedre skranke egenskapen dersom enhver mengde som har en nedre skranke også har en største nedre skranke

Teorem: En ordning med den minste øvre skranke egenskapen har også den største nedre skranke egenskapen.

Bevis: Anta at A har en nedre skranke. Vi må vise at A har en største nedre skranke. La

$$B = \{b : b \text{ er en nedre skranke for } A\}$$

B er ikke-tom siden A har nedre skranker og ethvert element i A er en øvre skranke for B (hvis $b \in B$ og $a \in A$, så $b \leq a$). Siden ordningen har den minste øvre skranke egenskapen, har B en minste øvre skranke c. Vi skal vise at c er en største nedre skranke for A.

Hvis $a \in A$, vet vi at a er en øvre skranke for B, og siden c er den minste øvre skranken, er dermed $c \leq a$. Dette betyr at c er en nedre skranke for A. Samtidig er $c \geq b$ for alle $b \in B$ (siden c er en øvre skranke for B). Siden B består av alle nedre skranker for A, betyr dette at c er en største nedre skranke. QED

Forfininger:

Husk at en relasjon på X "egentlig" er en delmengde R av X^2

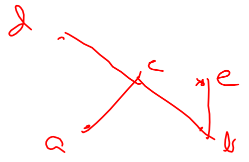
Vi sier at en relasjon R_2 er en forfining av R_1 dersom

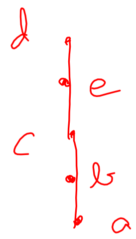
$$R_1 \subseteq R_2$$

Sagt på en annen måte

Hvis $x R_1 y$, så $x R_2 y$ (men ikke nødvendigvis omvendt).

Eksempel: Partiell ordning: $\Longrightarrow$ total ordning som bevarer elementene i den opprinnelige ordningen?





$a \leq b \leq c \leq e \leq d$

$x \leq y$	x utføres før y

Spørsmål: Kan vi alltid forfine en partiell ordning til en total ordning?