Ordnede kropper

Definisjon: En ordnet kropp består av en kropp $(K,+,\cdot)$ med en total ordning $\leq$ på K som samspiller med $+$ og $\cdot$. Mer presist har vi:

(i) $+$ og $\cdot$ er assosiative
(ii) $+$ og $\cdot$ er kommutative
(iii) Det finnes et nøytralt element 0 for addisjon $(a+0=a)$ og et nøytralt element 1 for multiplikasjon $(a\cdot 1=a)$
(iv) Ethvert element $a\in K$ har en additiv invers $-a$ $\quad (a+(-a)=0)$
(v) Ethvert element $a\neq 0$ har en multiplikativ invers a^{-1} $\quad (aa^{-1}=1)$
(vi) $\cdot$ gange distributiv over $+$ $\quad (a(b+c)=ab+ac)$

$(K,+,\cdot)$ er kropp

(vii) $\leq$ er refleksiv ($x\leq x$ for alle x).
(viii) $\leq$ er antisymmetrisk ($x\leq y$ og $y\leq x \Rightarrow x=y$)
(ix) $\leq$ er transitiv ($x\leq y$ og $y\leq z \Rightarrow x\leq z$)
(x) $\leq$ er total (for alle $x,y\in K$ er enten $x\leq y$ eller $y\leq x$)

$\leq$ er en total ordning

(xi) Dersom $a\leq b$, så er $a+c\leq b+c$
(xii) Dersom $a\geq 0$ og $b\geq 0$, så er $ab\geq 0$.

Eksempler: $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$ er ordnede kropper.

Setning: Dersom $a\leq b$ og $c\leq d$, så $a+c\leq b+d$

Bevis: Fra (xi) har vi $a+c\leq b+c$
og $c+b\leq d+b$.
$b+c\leq b+d$

$\underbrace{a+c\leq b+c\leq b+d}_{\text{transitiv}}$

$a+c\leq b+d$

Setning: $b\geq a$ hvis og bare hvis $b-a\geq 0$

Bevis: $b\geq a \Rightarrow b+(-a)\geq a+(-a) \Rightarrow b-a\geq 0$

$b-a\geq 0 \Rightarrow (b-a)+a\geq 0+a \Rightarrow b\geq a$

Setning: $c\leq 0 \Leftrightarrow -c\geq 0$

Bevis: $c\leq 0 \Leftrightarrow 0-c\geq 0 \Leftrightarrow -c\geq 0$.

Setning: Anta at $a\leq b$
(i) Hvis $c\geq 0$, så $ac\leq bc$
(ii) Hvis $c\leq 0$, så $ac\geq bc$

Bevis (i) Siden $a\leq b$, er $b-a\geq 0$. Siden $b-a\geq 0$ og $c\geq 0$, så er $(b-a)c\geq 0$ (pga (xii)). Dermed er $bc-ac\geq 0$, dvs $bc\geq ac$

(ii) Siden $c\leq 0$, så er $-c\geq 0$. Dermed (ved (xii)) er $(b-a)(-c)\geq 0$, dvs. $-bc+ac\geq 0$ eller $ac-bc\geq 0$. Dermed er $ac\geq bc$

Korollar: (i) Hvis $a\geq 0$ og $b\leq 0$, så er $ab\leq 0$
(ii) Hvis $a\leq 0$ og $b\leq 0$, så er $ab\geq 0$

Bevis: (i) Siden $a\geq 0$, kan jeg gange ulikheten $b\leq 0$ med a og bevare ulikheten: $ab\leq a\cdot 0=0$.

(ii) Siden $a\leq 0$, kan vi gange ulikheten $b\leq 0$ med a, men da må vi snu retningen på ulikheten: $ab\geq a0=0$

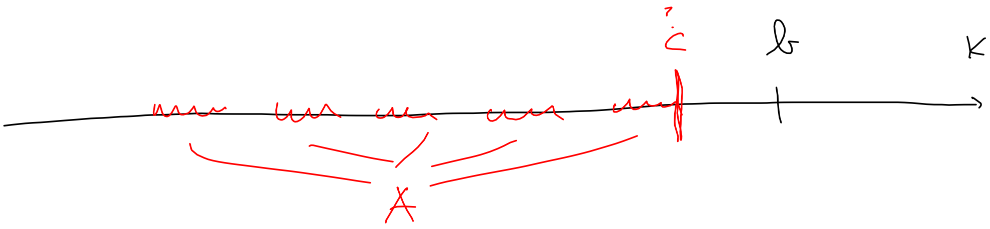
Setning: $0<1$.

Bevis: Siden $0\neq 1$, og ordningen er total, må $0<1$ eller $0>1$.

Siden $1=1\cdot 1$
(i) $0<1$: Da $1\cdot 1$ positiv, følger at $1>0$.
(ii) $0>1$. Da $1\cdot 1$ positiv, følger at $1>0$.

$\mathbb{R}$ som ordnet kropp

En delmengde A av en ordnet kropp K kalles oppad begrenset dersom det finnes en $b \in K$ slik at $b \geq a$ for alle $a \in A$



b kalles en øvre skranke for A. En øvre skranke som er mindre enn alle andre øvre skranker, kalles en minste øvre skranke.

Kompletthetsaksiomet: Vi sier at K er en komplett ordnet kropp dersom enhver ikke-tom oppad begrenset delmengde av K har en minste øvre skranke.

Eksempel: $\mathbb{R}$ er en komplett ordnet kropp.

Matematikere sier: "$\mathbb{R}$ er den eneste komplette ordnede kroppen"

Virkelig: "alle komplette ordnede kropper er kopier av $\mathbb{R}$"

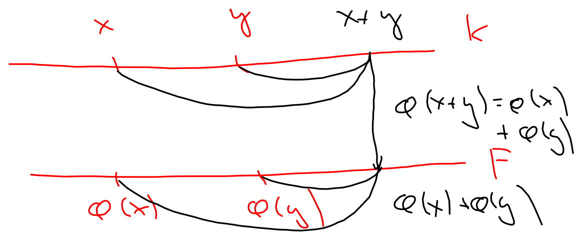
hva betyr dette?

Definisjon: Anta at K og F er to ordnede kropper. En isomorfi fra K til F er en bijeksjon $\varphi : K \to F$ slik at

(i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(ii) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

(iii) Hvis $x \leq y$, så er $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.



Presis formulering av matematiker utsagn:

Alle komplette ordnede kropper er isomorfe med $\mathbb{R}$.

Tellbare mengder 13.2 → 13.1

Definisjon: En mengde A er tellbar dersom det finnes en følge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ som inneholder alle elementene i A.

Eksempel: $\mathbb{N}$ er tellbar: $1, 2, 3, 4, \ldots$

$\mathbb{Z}$ er tellbar: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

En endelig mengde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ er tellbar: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_n, a_n, \ldots$

En uendelig tellbar mengde sier vi er tellbart uendelig.

Setning: Hvis vi har en tellbar mengde A_n for hver n, så er unionen

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

tellbar. (unionen av tellbart mange tellbare mengder er selv tellbar)

Bevis: Siden hver av mengdene $A_1, A_2, A_3, \ldots$ er tellbare, kan vi liste alle elementene i hver mengde:

$A_1: a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots$

$A_2: a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots$

$A_3: a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots$

$\vdots$

Dermed er

$$A: \underbrace{a_{11}}_{\text{indeksum } 2}, \underbrace{a_{12}, a_{21}}_{\text{indeksum } 3}, \underbrace{a_{13}, a_{22}, a_{31}}_{\text{indeksum } 4}, \ldots$$

som viser at A er tellbar.

Setning: Anta at A, B er tellbare. Da er $A \times B$ også tellbart.

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Bevis: Lister opp A og B

$A: a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$B: b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$

$$A \times B: \underbrace{(a_1, b_1)}_{\text{indekssum } 2}, \underbrace{(a_1, b_2), (a_2, b_1)}_{\text{indekssum } 3}, \underbrace{(a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1)}_{\text{indekssum } 4}, \ldots$$

Som viser at $A \times B$ er tellbar.

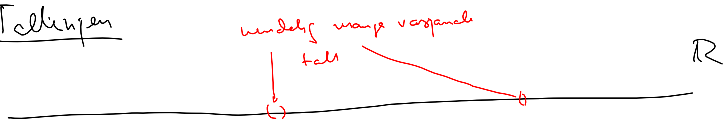
Setning: $\mathbb{Q}$ er tellbar.

Bevis: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Siden $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$ er tellbare, er $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ også tellbar. Vi har dermed en liste $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3), \ldots$ av alle elementene i $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Dermed er $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots$ en opplisting av alle elementene i $\mathbb{Q}$.

Tallinjen



Teorem: $\mathbb{R}$ er ikke tellbar.

Bevis (Cantors diagonalargument): Anta for motsigelse at $\mathbb{R}$ er tellbar.

La $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ være en opplisting av alle elementene i $\mathbb{R}$. Vi skal vise at det nødvendigvis finnes et element i $\mathbb{R}$ som ikke er på listen og dermed fremprovosere en motsigelse. Ser på desimalutviklingene:

$$r_1 = h_1 . d_{11} d_{12} d_{13} \ldots\ldots$$
$$r_2 = h_2 . d_{21} d_{22} d_{23} \ldots\ldots$$
$$r_3 = h_3 . d_{31} d_{32} d_{33} \ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$r_n = h_n . d_{n1} d_{n2} d_{n3} \ldots d_{nn} \ldots\ldots$$
$$\vdots$$

Lager et nytt tall s ved

$$s = 0.c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$$

slik at $c \neq r_i$ for alle i.

Sett $c_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } d_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{hvis } d_{ii} = 1 \end{cases}$

Dermed er $c_i \neq d_{ii}$ for alle i.

Altså er $s \neq r_i$ for alle i siden i-te desimalen er forskjellig.

Setning: En mengde A er tellbart uendelig hvis og bare hvis det finnes en bijeksjon $f: \mathbb{N} \to A$.

Bevis: Anta at det finnes en slik f. Da er A tellbar fordi

$$f(1), f(2), f(3), \ldots$$

er en opplisting av alle elementene i A.

Anta at A er tellbart uendelig, må lage en bijeksjon $f: \mathbb{N} \to A$. Siden A er tellbar, finnes det en opplisting $a_1, a_2, a_3, \ldots$ av alle elementene.

Definer f som følger: $f(1)$ = det første elementet i listen som er med i A.

$f(2)$ = det første elementet etter $f(1)$ som er med i A og forskjellig fra $f(1)$

$f(3)$ = det første elementet etter $f(2)$ som er med i A og forskjellig fra $f(1)$ og $f(2)$.

osv.

Siden A er uendelig, stopper prosessen aldri opp.

Prøver:

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \; a_7 \; a_8 \; a_9 \; a_{10}$

$f(1) \quad f(2) \quad f(3)$