Kardinalitet

Definisjon: To mengder A og B har samme kardinalitet dersom det finnes en bijeksjon $f: A \to B$.

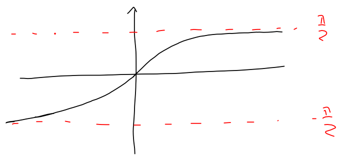
Eksempler: a) To endelige mengder A, B har samme kardinalitet hvis og bare hvis de har like mange elementer.

b) En mengde er tellbar uendelig hvis og bare hvis den har samme kardinalitet som $\mathbb{N}$. (vikte ord)

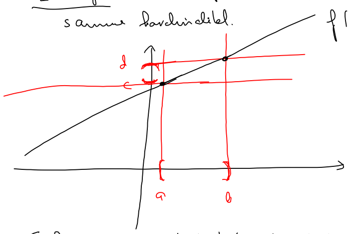
Notasjon: Dersom A og B har samme kardinalitet, skriver vi

$$|A| = |B| \quad \text{og} \quad \text{card}(A) = \text{card}(B)$$

Eksempel: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ har samme kardinalitet som $\mathbb{R}$, siden $\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ er en bijeksjon



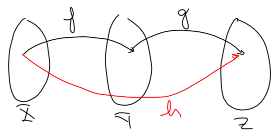
Eksempel: Alle åpne, endelige intervaller (a,b) og (c,d) har samme kardinalitet.

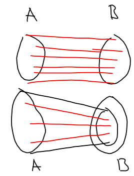


Funksjon også for lukket og halvåpne.

Setning: Hvis $|X| = |Y|$ og $|Y| = |Z|$, så $|X| = |Z|$.

Bevis: Det finnes bijeksjoner $f: X \to Y$ og $g: Y \to Z$, og dermed er $h = g \circ f$ en bijeksjon fra X til Z.





Definisjon: Hvis A og B er to mengder, skriver vi

(i) $|A| = |B|$ dersom det finnes en bijeksjon $f: A \to B$

(ii) $|A| \leq |B|$ —— " —— injeksjon $f: A \to B$

(iii) $|A| < |B|$ dersom finnes en injeksjon $f: A \to B$ men det finnes ingen surjeksjon $g: A \to B$.

Vet: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ (Cantor)

Teorem: For enhver mengde A, så $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

potensmengden til A = mengden av alle delmengder av A.

Bevis: Vi må vise at det finnes en injeksjon [1] $f: A \to \mathcal{P}(A)$, men at det ikke finnes noen surjeksjon [2] $g: A \to \mathcal{P}(A)$.

1. Vi definerer f ved $f(a) = \{a\}$. Injeksjon $f: A \to \mathcal{P}(A)$.
2. Anta for motsigelse at det finnes en surjektiv $g: A \to \mathcal{P}(A)$.

   La $B \subseteq A$ være definert ved

   $\longrightarrow B = \{a \in A : a \notin g(a)\}$

Siden g er surjektiv, finnes det en $b \in A$ slik at $g(b) = B$.

To muligheter:

(i) $b \in g(b) = B$: Siden $b \in g(b)$, så $b \notin B$. Selvmotsigelse $b \in B \Rightarrow b \notin B$

(ii) $b \notin g(b) = B$: Siden $b \notin g(b)$, så $b \in B$. Selvmotsigelse $b \notin B \Rightarrow b \in B$.

Antagelsen om at det finnes en surjektiv $g: A \to \mathcal{P}(A)$ fører altså til en selvmotsigelse og altså finnes det ingen surjeksjon.

Kan lage en kjede av kardinaliteter:

$$\mathbb{N} < \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) < \ldots$$

To naturlige spørsmål

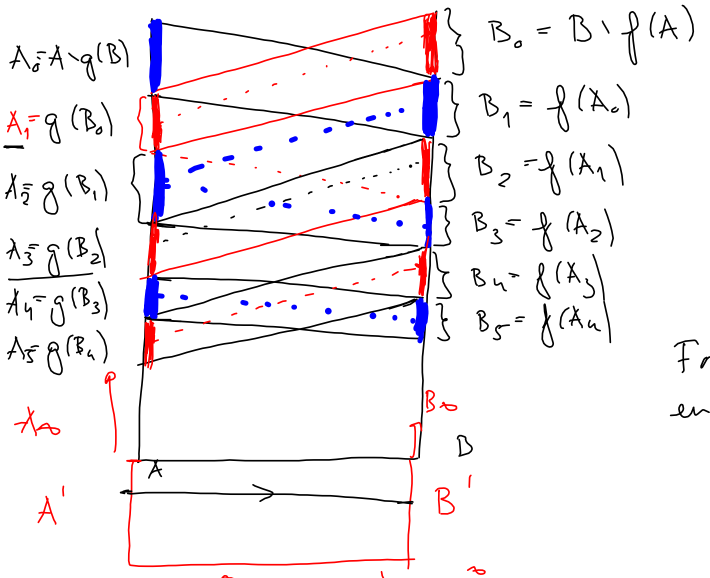
1. Hvis $|A| \leq |B|$ og $|B| \leq |A|$, er da $|A| = |B|$? (antisymmetri)

Altså: Hvis vi har injektive funksjon $f: A \to B$ og $g: B \to A$, har vi da en bijeksjon $h: A \to B$?

2. Hvis vi har to mengder, er da enten $|A| \leq |B|$ eller $|B| \leq |A|$? (total)
(forutsetter utvalgsaksiomet og Zorns lemma).

Cantor-Schröder-Bernsteins teorem: Hvis $|A| \leq |B|$ og $|B| \leq |A|$, så er $|A| = |B|$.

Bevis: Har en injektiv funksjon $f: A \to B$ og en injektiv funksjon $g: B \to A$, må lage en bijektiv funksjon $h: A \to B$.



$A' = A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, $B' = B \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$

$h(x) = f(x)$ når $x \in A_0$

$h(x) = g^{-1}(x)$ når $x \in A_1$

$h(x) = f(x)$ når $x \in A_2$

$h(x) = g^{-1}(x)$ når $x \in A_3$

$h(x) = f(x)$ når $x \in A_4$

$h(x) = g^{-1}(x)$ når $x \in A_5$

Fortsetter vi på denne måten, får vi en bijeksjon

$$h: \underbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n}_{A_\infty} \to \underbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n}_{B_\infty}$$

$h(x) = f(x)$. $x \in A'$

Denne funksjonen h vi nå har laget, er en bijeksjon mellom A og B.

Eksempel: $[0,1)$ har samme kardinalitet som hele $\mathbb{R}$.

Trenger injeksjoner begge veier: $f: [0,1) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ $|[0,1)| \leq |\mathbb{R}|$

Den andre veien bruker vi at vi til sist: $|[0,1)| \underset{\subseteq}{\geq} |(0,1)| \underset{\text{bij. funk.}}{=} |(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| \underset{\text{arctan}}{=} |\mathbb{R}|$

$|[0,1)| \geq |\mathbb{R}|$

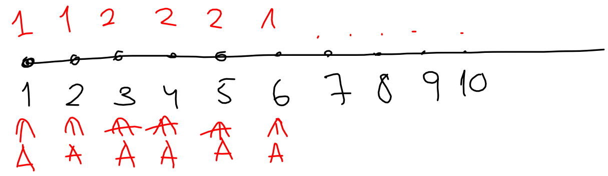
Cantor-Schröder-Bernstein: $|[0,1)| = |\mathbb{R}|$.

Setning: $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Bevis: Må vise at $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ og $|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, CSB tar hånd om resten.

1. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ betyr $A \subseteq \mathbb{N}$



$f: A \to 0.11221 \ldots\ldots$ Dette gir en injektiv funksjon $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$

2. $|\mathbb{R}| = |[0,1)| \overset{?}{\leq} |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ Hvis $a \in [0,1)$, kan vi skrive det på binærform

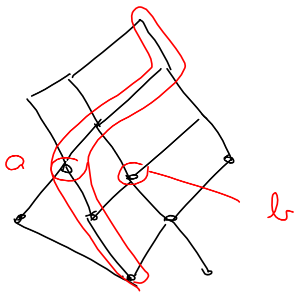
$a = 0.11001110 \ldots\ldots$ Hvis tvetydighet, velg desimalutvikling med bare nuller til slutt

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $A = \{1, 2, 5, 6, 7 \ldots\}$

$g: [0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Zorns lemma

$(X, \le)$ en partiell ordning.



En kjede er en delmengde C av en partiell ordning slik at $(C, \le)$ er totalt ordnet.

En övre skranke for C er et element $d \in X$ slik at $c \le d$ for alle $c \in C$.

Et element x i X er maksimalt dersom det ikke finnes noe element y i X slik at $y > x$.

Zorns lemma: Anta at $(X, \le)$ er en partiell ordning der alle kjeder har en övre skranke. Da har $(X, \le)$ et maksimalt element.