Fra partielle til totale ordninger

Husk: $\leq$ på en mengde X er en partiell ordning dersom

(i) Refleksiv: $x \leq x$ for alle $x \in X$

(ii) Antisymmetrisk: $x \leq y$ og $y \leq x \Rightarrow x = y$

(iii) Transitiv: $x \leq y$ og $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

x og y er ikke-sammenlignbare dersom vi hverken har $x \leq y$ eller $y \leq x$. Hvis det ikke finnes ikke-sammenlignbare elementer, sier vi at $\leq$ er en total ordning.

Forfining: Vi sier $\leq_1$ er en forfining av $\leq$ dersom
$\leq \subseteq \leq_1$ dvs
$$x \leq y \Rightarrow x \leq_1 y$$

Setning: Anta at $\leq$ er en partiell ordning på en mengde X, og at x, y ikke er sammenlignbare. Da finnes det en forfining $\leq_1$ av $\leq$ slik at $x \leq_1 y$.

Idé og problem: Kan vi ikke bare sette
$$\leq_1 = \leq \cup \{(x,y)\} \; ?$$
Problemet er at $\leq$ sannsynligvis ikke er transitiv. $x_1 \leq y$

$u \leq x \; \underset{x \leq_1 y}{\uparrow} \; y \leq v \Rightarrow u \leq_1 v$

Bevis: Vi definerer en ny relasjon $\leq_1$ på X ved
$$u \leq_1 v \begin{cases} \text{hvis } u \leq v & \text{Alternativ I} \\ \text{eller} & \\ u \leq x \text{ og } y \leq v & \text{Alternativ II} \end{cases}$$

To observasjoner

1. $\leq_1$ er en forfining $\leq$.
2. $x \leq_1 y$ (fordi $x \leq x$ og $y \leq y \Rightarrow x \leq_1 y$)

Det gjenstår å vise at $\leq_1$ er en partiell ordning, dvs at de tre kravene til en partiell ordning er oppfylt. Sjekker dem hver for seg:

1 Refleksiv: $x \leq_1 x$ fordi $x \leq x$ ($\leq$ er en p.o.)

2 Antisymmetri: Må vise at hvis $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 u$, så er $u = v$.

I utgangspunktet er det fire muligheter dette kan skje på:
$u \leq_1 v$ < alt I / alt II $\quad v \leq_1 u$ < alt I / alt II

Ser på hver mulighet:

1. Både $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 u$ gjelder ved alt. I, dvs $u \leq v$ og $v \leq u$. Siden $\leq$ er en p.o., betyr dette at $u = v$.
2. Anta $u \leq_1 v$ alt I: $u \leq v$; $v \leq_1 u$ alt II, dvs $v \leq x$ og $y \leq u$ $\}$ $\underbrace{y \leq u,\ u \leq v}_{y \leq v},\ v \leq x$ trans: $y \leq x$ umulig siden y, x ikke er sammenlignbare.
3. Anta at $u \leq_1 v$ alt II, $v \leq_1 u$ alt I $\}$ kan ikke oppstå på samme måte som 2.
4. Anta at $u \leq_1 v$ ved alt II: $u \leq x$ og $y \leq v$; $v \leq_1 u$ ved alt II: $v \leq x$ og $y \leq u$ $\}$ $y \leq u \;\; u \leq x$ $\;\; y \leq x$ umulig

sep 12-12:12

3. Transitivitet: $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 w$, så $u \leq_1 w$.

Fire muligheter:

1. $u \leq_1 v$ alt I: $u \leq v$; $v \leq_1 w$ alt I: $v \leq w$ $\} \Rightarrow u \leq w \Rightarrow u \leq_1 w$
2. $u \leq_1 v$ alt I: $u \leq v \Rightarrow u \leq x$; $v \leq_1 w$ alt II: $v \leq x$, $y \leq w$ $\}$ $u \leq x$ og $y \leq w \overset{\text{alt II}}{\Rightarrow} u \leq_1 w$
3. $u \leq_1 v$ alt II $u \leq x$ og $y \leq v$; $v \leq_1 w$ alt I $v \leq w$ $\Rightarrow y \leq w \overset{\text{alt II}}{\Rightarrow} u \leq_1 w$
4. $u \leq_1 v$ alt II $u \leq x$ og $y \leq v$; $v \leq_1 w$ alt II $v \leq x$ og $y \leq w$ $\}$ $y \leq v \;\; v \leq x \Rightarrow y \leq x$ Umulig, situasjonen oppstår ikke.

HURRA, alle kravene er oppfylt, så $\leq_1$ er en partiell ordning.

Teorem: Enhver partiell ordning $\leq$ på en endelig mengde kan forfines til en total ordning.

Bevis: Hvis $\leq$ er total, så er vi ferdig. Hvis ikke, finnes det ikke-sammenlignbare elementer x_1, y_1. Ifølge setningen finnes det en forfining $\leq_1$ der $x_1 \leq_1 y_1$.

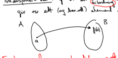
Enten er $\leq_1$ total, og i så fall er vi ferdig, eller så finnes det elementer x_2, y_2 som ikke er sammenlignbare i den nye ordning $\leq_1$. Da finnes det en forfining $\leq_2$ der $x_2 \leq_2 y_2$. Fortsett på denne måten til vi går tom for ikke-sammenlignbare par (siden X er endelig, finnes det bare endelig mange par). Det betyr at vi har kommet frem til en total ordning som forfiner $\leq$.

sep 12-12:42

Funksjoner

Hva er en funksjon f fra en mengde A til en mengde B?

Tradisjonelt svar: f er en regel / tilordning som til hvert element $a \in A$ gir oss ett (og bare ett) element $f(a)$ i B.

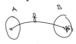


Funksjonen f gir opphav til en mengde
$G = \{(a, f(a)) : a \in A\}$ < hvor hver $a \in A$, finnes det nøyaktig en $b \in B$ slik at $(a,b) \in G$. $= f(a)$
$\cap$
$A \times B$

Definisjon: En funksjon f fra A til B (i notasjon $f: A \to B$) er en delmengde av $A \times B$ slik at for hver $a \in A$ finnes det nøyaktig en $b \in B$ slik $(a,b) \in f$. Denne b en betegner vi med $f(a)$.

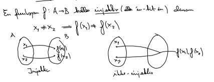
Vi kan nå tolke en "regel" som beskriver f: Gitt $a \in A$, finn det entydige elementet b slik at $(a,b) \in f$. Da er $f(a) = b$.

Illustrasjon:

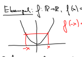


Injektiv, surjektiv, bijektiv

En funksjon $f: A \to B$ kalles injektiv (eller "én-til-én") dersom
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

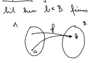


Eksempel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

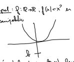


$f(-x) = f(x)$ ikke injektiv.

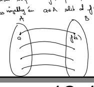
Definisjon: $f: A \to B$ kalles surjektiv (eller på) dersom det til hver $b \in B$ finnes en $a \in A$ slik at $f(a) = b$.



Eksempel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ er ikke surjektiv



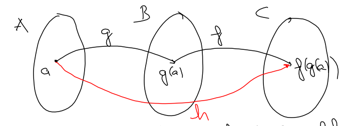
Definisjon: $f: A \to B$ er bijektiv (én-én-tydig korrespondanse) dersom den er både injektiv og surjektiv, dvs at det for hver $b \in B$ finnes nøyaktig én $a \in A$ slik at $f(a) = b$.



sep 12-13:13

Sammensetning av funksjoner

A, B, C er tre mengder, $g: A \to B$, $f: B \to C$



Den sammensatte funksjonen $h: A \to C$ er definert ved
$$h(a) = f(g(a)) \text{ for alle } a \in A.$$
Vi skriver gjerne $f \circ g$ for den sammensatte funksjonen h, så
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
Husk kjerneregelen: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

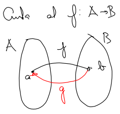
Setning: Funksjonssammensetning er assosiativ, dvs
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$
$\underbrace{(a-b)-c}_{a-b-c} \qquad a-(b-c) = a-b+c$

Bevis: $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$
$f \circ (g \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$ $\Big\}$ for alle x.

sep 12-13:39

Omvendte (inverse) funksjoner

Anta at $f: A \to B$ er en bijektiv funksjon. For hver $b \in B$ finnes det en entydig bestemt $a \in A$ slik at
$$f(a) = b$$

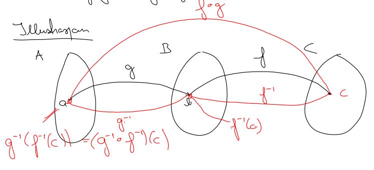


Vi kan dermed definere en funksjon $g: B \to A$ slik at
$$g(b) = a \text{ når } f(a) = b.$$

Vi kaller dette den omvendte eller inverse funksjonen til f og betegner den med f^{-1}. Legg merke til at
$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{og} \quad f(f^{-1}(b)) = b$$

Setning: Anta at $g: A \to B$ og $f: B \to C$ er bijektive funksjoner. Da er $f \circ g$ bijektiv og
$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Illustrasjon



sep 12-13:49