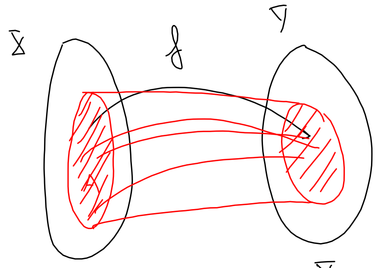
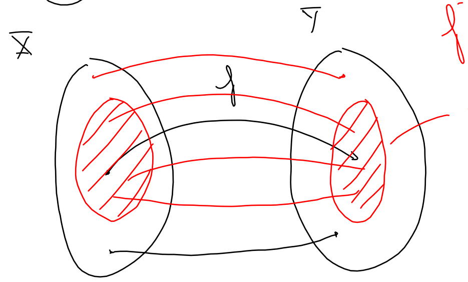
Direkte og inverse bilder

Utgangspunkt: $f: X \to Y$



(direkte)

$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ er bildet av A under f



$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}$ er det inverse bildet av B under f

Advarsel om notasjon: Det inverse bildet er definert selv om f ikke har en omvendt funksjon.

Grunnleggende spørsmål: Er

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$? JA

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? NEI

$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$? JA

$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$? JA

Setning: Anta $f: X \to Y$ og at $\mathcal{B}$ er en familie av delmengder av Y. Da

(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$

(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \right) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$

Bevis: (i) Anta først at $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \right)$, dvs $f(x) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Det finnes en $B' \in \mathcal{B}$ slik at $f(x) \in B'$. Dette betyr $x \in f^{-1}(B')$, og dermed

$$x \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$$

Anta så at $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$. Dette betyr at det finnes en $B' \in \mathcal{B}$ slik at $x \in f^{-1}(B')$. Altså er $f(x) \in B'$, og dermed $f(x) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Dette betyr at $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \right)$

Setning: Anta at $f: X \to Y$ og at $B \subseteq Y$. Da er

$$f^{-1}(\underbrace{B^c}_{\text{mhp. } Y}) = \left(f^{-1}(B) \right)^{\underbrace{c}_{\text{mhp } X}}$$

Bevis: Anta først at $x \in f^{-1}(B^c)$, dvs $f(x) \in B^c$. Dermed er $f(x) \notin B$, så $x \notin f^{-1}(B)$. Dermed er $x \in \left(f^{-1}(B) \right)^c$.

Anta så at $x \in \left(f^{-1}(B) \right)^c$, da er $x \notin f^{-1}(B)$, så $f(x) \notin B$. Dette betyr at $f(x) \in B^c$, dvs $x \in f^{-1}(B^c)$.

Setning: Anta $f: X \to Y$ og at $\mathcal{A}$ er en familie av delmengder av X. Da er

(i) $f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)$

(ii) $f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$

Bevis: (i) Anta først at $y \in f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)$, dvs det finnes en $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ slik at $y = f(x)$. Dette betyr at det finnes en $A' \in \mathcal{A}$ slik at $x \in A'$. Da er $y = f(x)$ og $x \in A'$, dvs $y \in f(A')$. Dermed er

$$y \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)$$

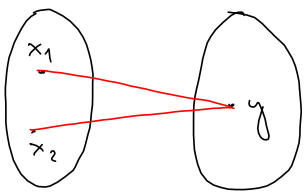
Anta $y \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)$. Da finnes det en $A' \in \mathcal{A}$ slik at $y \in f(A')$.

Men hvis $y \in f(A')$, så er $y \in f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)$.

(ii) For enhver $A' \in \mathcal{A}$, så må $f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq f(A')$. Men dermed er

$$f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq \bigcap_{A'\in\mathcal{A}} f(A') = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$$

Eksempel: $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y\}$, $f: X \to Y$, $f(x_1) = f(x_2) = y$.



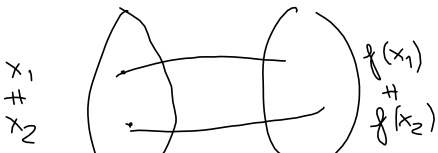
$f(\{x_1\}) = \{y\}$ $\quad f(\{x_2\}) = \{y\}$

$f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}$

$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$

Setning: Hvis $f: X \to Y$ er injektiv, så er

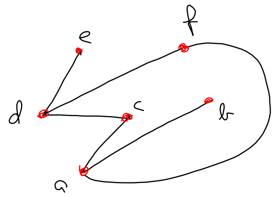
$$f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\right) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A).$$

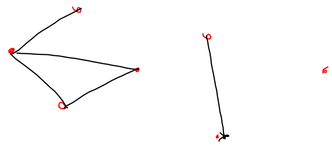


Bevis: Vet allerede $f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\right) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$, så det gjenstår å vise at $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A) \subseteq f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\right)$. Anta at $y \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$. Dette betyr at $y \in f(A)$ for alle $A \in \mathcal{A}$, dvs det finnes et element $x_A \in A$ slik at $y = f(x_A)$. Siden f er injektiv, må alle disse x_A'ene være det samme elementet x slik at $y = f(x)$. Siden $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$, betyr dette at $y \in f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\right)$

Grafteori

Hva er en graf?





$V = \{a,b,c,d,e,f\}$ hjørner, noder

$E = \{ \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,f\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{d,f\} \}$ kanter

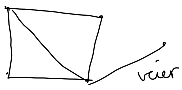
Definisjon: En graf $G=(V,E)$ består av en endelig mengde V (av hjørner) og en mengde E (av kanter) der E består av mengder $\{u,v\}$ der u og v er forskjellige elementer i V.

(Forbudt: uendelige mengder V, løkker , flere kanter mellom samme hjørner

Rettede grafer:  

)

Eksempler på grafer: Kart



Elektriske kretser.

Kloakkvär

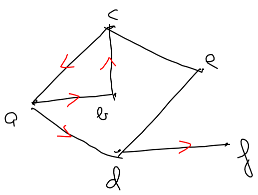
Hjørnene: Dere

Kant mellom de som kjent hverandre fra før.

Definisjon: En vandring i en graf er en sekvens av hjørner

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n \qquad \text{lengde } n$$

der $(v_{i-1}, v_i) \in E$ (dvs det er en kant fra v_{i-1} til v_i)



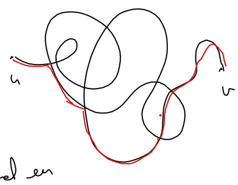
Vandring

$a \to b \to c \to a \to d \to f$

En sti er en vandring som ikke inneholder noe hjørne mer enn én gang

Setning: Hvis det finnes en vandring fra u til v, så finnes det også en sti fra u til v.

Bevis: Velg en vandring fra u til v med kortest mulig lengde.



$$u \to u_1 \to u_2 \to \dots\dots \to v$$

Hvis ingen hjørner forekommer flere ganger, har vi funnet en sti. Hvis et hjørne forekommer både som u_i og u_j $(i<j)$, så har vi

$$u \to u_1 \to \dots \to u_i \to u_{i+1} \to \dots \to u_j \to u_{j+1} \to \dots \to v$$

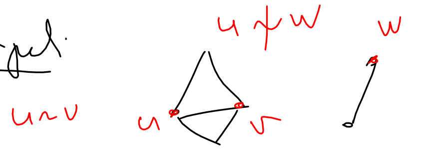
Dette gir oss en kortere sti

$$u \to u_1 \to \dots \to u_i \to u_{j+1} \to \dots \to v.$$

Selvmotsigelse.

Dette betyr at vandringen av minimal lengde er en sti.

Eksempel:



usammenhengende

Innfører en relasjon på V ved:

$u \sim v \Leftrightarrow$ dersom det finnes en vandring fra u til v.

Setning: $\sim$ er en ekvivalensrelasjon

Bevis: Sjekker de tre egenskapene:

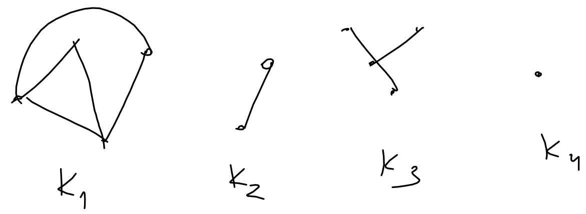
(i) Refleksiv: $u \sim u$ (OK, vandring med lengde 0)

(ii) Symmetrisk: $u \sim v \Rightarrow v \sim u$ (snu vandringen)

(iii) Transitiv: $u \sim v$ og $v \sim w \Rightarrow u \sim w$

$$\left.\begin{array}{l} u \to u_1 \to \dots \to v \\ v \to v_1 \to \dots \to w \end{array}\right\} \; u \to u_1 \to \dots \to v \to v_1 \to \dots \to w$$

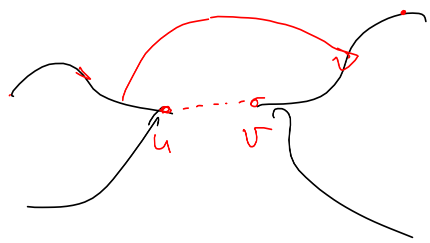
Ekvivalensklassene til $\sim$ kalles komponentene til grafen



Definisjon: En graf er sammenhengende dersom den bare har én komponent, dvs at uansett hvilke punkter $u, v \in V$ vi plukker ut, så finnes det en vandring fra u til v.

Setning: Anta at vi har en sammenhengende graf. $G = (V, E)$. Dersom vi fjerner én kant, vil den nye grafen enten være sammenhengende eller ha to komponenter.

Idé



Eks.