Zorns lemma

Anta at $(X, \leq)$ er en partielt ordnet mengde.

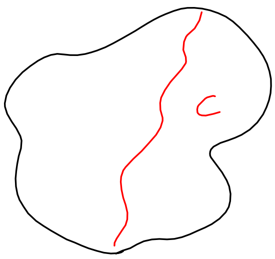
En kjede C i X er en totalt ordnet delmengde av X, dvs hvis $x, y \in C$, så er enten $x \leq y$ eller $y \leq x$.

Zorns lemma: Anta at $(X, \leq)$ er en partielt ordnet mengde der enhver ikke-tom kjede C har en øvre skranke. Da har $(X, \leq)$ et maksimalt element.

b slik $b \geq c$ for alle $c \in C$.

en $m \in X$ slik at det ikke finnes noen $y \in X$ slik at $y > m$.

Hausdorffs maksimumsprinsipp: Enhver partielt ordnet mengde har en maksimal kjede. (En kjede C er maksimal dersom det ikke finnes noen annen kjede D slik at $C \subset D$).



Bevis for Zorns lemma fra Hausdorffs m.p.

La $(X, \leq)$ være en partiell ordning der alle kjeder har en øvre skranke. Vi må vise at $(X, \leq)$ har et maksimalt element.

I følge Hausdorff finnes det en maksimal kjede C og per antagelse har C en øvre skranke d.

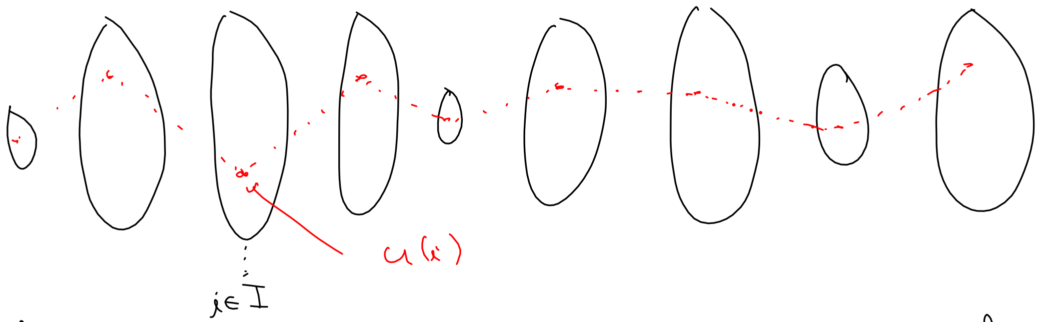
Vi skal vise at d er et maksimalt element. Anta for motsigelse at d ikke er maksimal, da finnes det et element $y > d$. Dermed er $C \cup \{y\}$ en ny kjede som er større enn C, men dette er umulig siden C er maksimal. Dette er en selvmotsigelse, og følgelig er d maksimal.

Bevis for Hausdorffs maksimumsprinsipp

For å bevise disse teoremene (Zorn + Hausdorff) trenger vi et mengdeteoretisk prinsipp:

Utvalgsaksiom: Anta at $\{A_i\}_{i\in I}$ er en indeksert familie av ikke-tomme mengder. Da finnes det en funksjon

$$u: I \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ slik at } u(i)\in A_i \text{ for alle } i.$$



Skal vise:

Hausdorffs maksimumsprinsipp: Enhver partiell ordning har en maksimal kjede.

Anta at $(X,\leq)$ er en partiell ordning. Vi skal "bygge" en maksimal kjede i X.

La $\mathcal{X}$ være alle kjeder i X inkludert $\emptyset$. Vi ordner $\mathcal{X}$ ved inklusjon $\subseteq$. Får en ny partiell ordning $(\mathcal{X},\subseteq)$.

Maskin for å utvide kjeder:

Anta at C er en ikke maksimal kjede i $(X,\leq)$. Velg en x slik at $C\cup\{x\}$ er en større kjede. Sett $C^+ = C\cup\{x\}$ (utvalgsaksiomet).

Hvis C er en maksimal kjede, setter vi $C^+ = C$.

Vi ønsker å bruke +-operasjonen til å lage en maksimal kjede. Idé:

$$\begin{array}{ccccccccc} C_0 & \subseteq & C_1 & \subseteq & C_2 & \subseteq & C_3 & \subseteq & \cdots\cdots C_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n,\ C_{\infty+1} = C_\infty^+,\ \ldots \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \\ \emptyset & & C_0^+ & & C_1^+ & & C_2^+ & & \end{array}$$

Problem: Mister kontroll, må prøve å beskrive den voksende mengden av C'er på en annen.

En delmengde $\mathcal{N}$ av X kalles <u>lukket</u> dersom:

(i) $\emptyset \in \mathcal{N}$

(ii) Hvis $C \in \mathcal{N}$, så er $C^+ \in \mathcal{N}$

(iii) Hvis $\mathcal{C}$ er en kjede i $\mathcal{N}$, så er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{N}$.

OBS: X er den <u>største</u> lukkede mengden.

<u>Lemma</u>: Det finnes en minste lukket mengde $\mathcal{M}$.

<u>Bevis</u>: Definer $\mathcal{M}$ ved

$$C \in \mathcal{M} \iff C \in \mathcal{N} \text{ for } \underline{\text{alle}} \text{ lukkede } \mathcal{N}.$$

Det holder å vise at $\mathcal{M}$ er lukket:

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$: Per definisjon er $\emptyset \in \mathcal{N}$ for alle lukkede $\mathcal{N}$, så $\emptyset \in \mathcal{M}$.

(ii) $C \in \mathcal{M} \Rightarrow C^+ \in \mathcal{M}$: Anta $C \in \mathcal{M}$. Da er $C \in \mathcal{N}$ for alle lukkede $\mathcal{N}$, og følgelig er $C^+ \in \mathcal{N}$ for alle lukkede $\mathcal{N}$. Altså er $C^+ \in \mathcal{M}$.

(iii) $\mathcal{C}$ kjede i $\mathcal{N} \Rightarrow \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{N}$: Anta at $\mathcal{C}$ er en kjede i $\mathcal{M}$. Da er $\mathcal{C}$ en kjede i $\mathcal{N}$ for alle lukkede $\mathcal{N}$, og dermed er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{N}$ for alle lukkede $\mathcal{N}$. Dermed er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{M}$.

Vi trenger å vise at $\mathcal{M}$ selv er en kjede, dvs at dersom $C, D \in \mathcal{M}$, så er enten $C \subseteq D$ eller $D \subseteq C$.

Definisjon: Et element $S \in \mathcal{M}$ kalles sammenlignbar dersom vi for alle $C \in \mathcal{M}$ har enten $S \subseteq C$ eller $C \subseteq S$.

$$\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{M} : S \text{ er sammenlignbar}\} \qquad \text{Håp: } \mathcal{S} = \mathcal{M}.$$

Lemma: Dersom S er sammenlignbar og $C \in \mathcal{M}$ med $C \overset{\text{ekte}}{\subset} S$, så er $C^+ \subseteq S$.

Bevis: Nok å se på ikke-inkluderte C'er. Anta for motsigelse at $C^+ \not\subseteq S$, siden S er sammenlignbar, må vi da $S \subset C^+$. Men da er

$$C \underset{\text{ett ekstra element}}{\subset} S \underset{\text{ett ekstra element}}{\subset} C^+$$

som viser at C^+ har minst to elementer mer enn C. Men det er umulig siden $C^+ = C \cup \{x\}$.

I det neste lemmaet bytter C og S roller, dvs

$$\boxed{S \subset C \Rightarrow S^+ \subseteq C} \qquad P \Rightarrow Q \qquad \neg P \vee Q$$

ekvivalent

$$S \not\subset C \text{ eller } S^+ \subseteq C$$

$$C \subseteq S \text{ eller } S^+ \subseteq C.$$

Lemma: Anta at $S \in \mathcal{S}$. For alle $C \in \mathcal{M}$ er da

$$C \subseteq S \text{ eller } S^+ \subseteq C. \quad (*)$$

Spesielt er S^+ sammenlignbar.

Bevis: Anta at vi har vist $(*)$. Da er S^+ sammenlignbar siden vi for enhver $C \in \mathcal{M}$ har

$$C \subseteq S^+ \text{ eller } S^+ \subseteq C.$$

La oss vise $(*)$. Sett

$$\mathcal{N} = \{C \in \mathcal{M} : \overbrace{C \subseteq S \text{ eller } S^+ \subseteq C}^{*}\}$$

Hvis vi kan vise at $\mathcal{N}$ er en lukket mengde, må $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ og dermed gjelder $(*)$ for alle $C \in \mathcal{M}$.

Sjekker at $\mathcal{N}$ er lukket:

(i) $\emptyset \in \mathcal{N}$: siden $\emptyset \subseteq S$.

(ii) $C \in \mathcal{N} \Rightarrow C^+ \in \mathcal{N}$: Anta at $C \in \mathcal{N}$, da

$$C \subset S \text{ eller } C = S \text{ eller } S^+ \subseteq C.$$

forrige lemma ⇓

$C^+ \subseteq S$ eller. $C^+ \supseteq S^+$ eller $S^+ \subseteq C^+$

$S^+ \subseteq C^+$

Følgelig oppfyller C^+ betingelsen $(*)$ og $C^+ \in \mathcal{N}$.

(iii) Anta at $\mathcal{C}$ er en kjede i $\mathcal{N}$. Må vise $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{N}$, altså

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq S \text{ eller } S^+ \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

For hver C er enten $C \subseteq S$ eller $S^+ \subseteq C$.

To muligheter

1. $C \subseteq S$ for alle $C \in \mathcal{C}$. Da er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq S$.
2. $S^+ \subseteq C$ for minst en $C \in \mathcal{C}$. Da $S^+ \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$

Det viser at $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{N}$.

Siden $\mathcal{M}$ er den minste lukkede mengden, betyr dette at $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, og følgelig holder betingelsen for alle $C \in \mathcal{M}$.

Setning: Alle elementer i $\mathcal{M}$ er sammenlignbare, dvs $\mathcal{M}$ er en kjede.

Bevis: Vi må vise $\mathcal{S} = \mathcal{M}$. Nok å vise at $\mathcal{S}$ er lukket.

Sjekker punktene

(i) $\emptyset \in \mathcal{S}$: $\emptyset \subseteq C$ for alle $C \in \mathcal{M}$, så $\emptyset \in \mathcal{S}$.

(ii) $S \in \mathcal{S} \Rightarrow S^+ \in \mathcal{S}$: Vist i forrige lemma.

(iii) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ er en kjede, så $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{S}$. Vi må vise at hvis $D \in \mathcal{M}$, så

er enten $D \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ eller $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq D$.

Siden hver $C \in \mathcal{C}$ er sammenlignbar, er enten

$$D \subseteq C \text{ eller } C \subseteq D.$$

To muligheter: (i) $C \subseteq D$ for alle $C \in \mathcal{C}$. Da er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq D$.

(ii) Det finnes minst én C der $D \subseteq C$. Men dermed $D \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ OK.

Dermed er $\mathcal{S}$ lukket og siden $\mathcal{M}$ er den minste lukkede mengden er $\mathcal{S} = \mathcal{M}$.

Bevis for Hausdorffs maksimumsprinsipp: Siden $\mathcal{M}$ er en lukket kjede, er

$M = \bigcup_{C \in \mathcal{M}} C$ en kjede som ligger i $\mathcal{M}$ siden $\mathcal{M}$ er lukket. Da må M^+ ligge i $\mathcal{M}$ (siden $\mathcal{M}$ er lukket).

Vi ser at $M^+ = M$ (ellers ville ikke M^+ stå inne i seg selv)

Dette betyr at M er en maksimal kjede. QED.