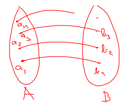
Kardinalitet er totalt ordnet

Teorem: For alle mengder A og B, så er enten $|A| \leq |B|$ eller $|B| \leq |A|$.

Motivasjon: A og B endelig.



Definér en injektiv funksjon skrittvis

$$\left.\begin{aligned} f(a_1) &= b_1 \\ f(a_2) &= b_2 \\ f(a_3) &= b_3 \end{aligned}\right\} \text{ partiell funksjon fra } A \text{ til } B$$

Prosessen stopper opp:

1. Ikke flere elementer i A: $f: A \to B$ er injektiv: $|A| \leq |B|$
2. Ikke flere elementer i B: $g = f^{-1}: B \to A$ injektiv: $|B| \leq |A|$.

Husk:

Zorns lemma: Hvis $(X, \leq)$ er en partiell ordning der alle kjeder har en øvre skranke, så har X et maksimalt element.

Definisjon: En partiell funksjon fra A til B er en funksjon $f: X \to B$ der $X \subseteq A$.

Lager en partiell ordning:

$$\mathcal{X} = \{(X, f_X) : X \subseteq A \text{ og } f_X : X \xrightarrow{\text{injektiv}} B\}$$

Definér en relasjon $\leq$ på $\mathcal{X}$ ved:

$$(X, f_X) \leq (Y, f_Y) \iff X \subseteq Y \text{ og } f_X(x) = f_Y(x) \text{ for alle } x \in X.$$

Lemma: $\leq$ er en partiell ordning på $\mathcal{X}$.

Bevis: Må sjekke kravene til partiell ordning:

(i) Refleksiv: $(X, f_X) \leq (X, f_X)$ opplagt.

(ii) Antisymmetri: Anta at $\underbrace{(X, f_X) \leq (Y, f_Y)}_{X \subseteq Y}$ og $\underbrace{(Y, f_Y) \leq (X, f_X)}_{Y \subseteq X}$, må vise at $(X, f_X) = (Y, f_Y)$

$X = Y$

$f_X(x) = f_Y(x)$ for alle $x \in X$
$\Rightarrow f_X = f_Y$

(iii) Transitiv: Anta

$\underbrace{(X, f_X) \leq (Y, f_Y)}_{X \subseteq Y}$ og $\underbrace{(Y, f_Y) \leq (Z, f_Z)}_{Y \subseteq Z}$,

må vise at $(X, f_X) \leq (Z, f_Z)$.

$X \subseteq Z$

Anta $x \in X$. Da er

$$f_X(x) = f_Y(\underset{\substack{\cap \\ Y}}{x}) = f_Z(x)$$

Så $(X, f_X) \leq (Z, f_Z)$.

Lemma: Alle kjeder i $(\mathcal{X}, \leq)$ har en øvre skranke.

Bevis: Anta at $\mathcal{C}$ er en kjede i $(\mathcal{X}, \leq)$. Elementene i $\mathcal{C}$ er par (X, f_X) slik at hvis $(X, f_X), (Y, f_Y) \in \mathcal{C}$, så vil enten $(X, f_X) \leq (Y, f_Y)$ eller $(Y, f_Y) \leq (X, f_X)$.

Må finne en øvre skranke (Z, f_Z) for $\mathcal{C}$. Sett

$$Z = \bigcup_{(X, f_X) \in \mathcal{C}} X$$

Ønsker å definere f_Z på følgende måte:

$f_Z(z) = f_X(z)$ der $x \in X$ (siden $Z = \bigcup X$, må z være med i minst én X).

Potensielt problem: Hva hvis $z \in X_1$ og $z \in X_2$ og $f_{X_1}(z) \neq f_{X_2}(z)$

Dette problemet dukker ikke opp: Siden $\mathcal{C}$ er totalt ordnet, så må enten $\underbrace{(X_1, f_{X_1}) \leq (X_2, f_{X_2})}$ eller $(X_2, f_{X_2}) \leq (X_1, f_{X_1})$.

Da er $z \in X_1$ og dermed er $f_{X_1}(z) = f_{X_2}(z)$

Dermed er f_Z veldefinert og det er enkelt å sjekke at (Z, f_Z) er en øvre skranke for $\mathcal{C}$.

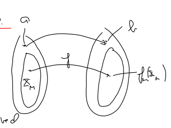
Bevis for teoremet: Betingelsen for Zorns lemma er oppfylt, så ordningen har et maksimalt element (X_M, f_M)

To muligheter: (i) $X_M = A$

(ii) $X_M \subset A$

(i) Da er $f_M: A \to B$ en injektiv funksjon, så $|A| \leq |B|$.

(ii) Hvis $X_M \subset A$, så er $f_M(X_M) = B$.



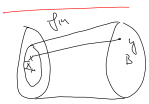
For å se dette anta for motsigelse at $f_M(X_M) \subset B$. Da finnes det en $a \in A \setminus X_M$ og $b \in B \setminus f_M(X_M)$.

La $X = X_M \cup \{a\}$ og definer $f: X \to B$ ved

$$f(x) = \begin{cases} f_M(x) & \text{når } x \in X_M \\ b & \text{når } x = a. \end{cases}$$

Da er $(X, f) \in \mathcal{X}$ og $(X_M, f_M) < (X, f)$. Dette er en selvmotsigelse siden (X_M, f_M) er maksimal.

Vi har dermed



Definer en injektiv funksjon $g: B \to A$ ved

$g(y) = x$ der $x \in X_M$ er elementet slik at $f_M(x) = y$

Følgelig er $|B| \leq |A|$.

Repetisjon

Logikk

Sannhetsverditabell:

Konnektiver:
- $\sim$ ikke
- $\wedge$ og
- $\vee$ eller
- $\Rightarrow$ impliserer
- $\Leftrightarrow$ ekvivalent

Logiske regneregler: Distributive lover:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

De Morgans lover:

$$\sim(P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q)$$
$$\sim(P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$$

Greit å huske: $P \Rightarrow Q = \sim P \vee Q$

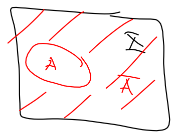
Eksempel: $\sim(A \Rightarrow B) = \sim(\sim A \vee B) = (\sim\sim A) \wedge \sim B = A \wedge \sim B$

Mengder

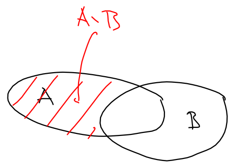
Distributive lover:

$$A \cap \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (A \cap B)$$
$$A \cup \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\right) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} (A \cup B)$$

De Morgan: Univers X: $\bar{A} = X \setminus A$



$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$
$$\overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$



Greit å vite: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Familier med lukningsegenskaper:

Eks: Hvis X er en ikke-tom mengde, så kalles en familie $\mathcal{A}$ av delmengder av X en σ-algebra dersom:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) Hvis $A \in \mathcal{A}$, så er $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

(iii) Hvis $\{A_n\}$ er en følge av mengder i $\mathcal{A}$, så er
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Typisk oppgave: Vis at hvis $\{A_n\}$ er en følge av mengder i $\mathcal{A}$, så er

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Løsning: Ser at
$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \overbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\bar{A}_n}_{\in \mathcal{A}\ (ii)}}^{\in \mathcal{A}\ (iii)}$$

Derved er $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \in \mathcal{A}$, og ved (ii) er derved

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}} \in \mathcal{A}$$

Relasjoner

En relasjon R på en mengde X er en delmengde av X^2, dvs en samling par (x,y) der $x,y \in X$.

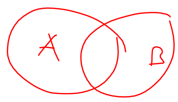
Istedenfor $(x,y) \in R$ skrives vi gjerne xRy ("x står i relasjon R til y")

Partiell ordning: $\leq$ er en partiell ordning dersom

(i) Refleksiv: $x \leq x$

(ii) Antisymmetrisk: $x \leq y$ og $y \leq x$, så $x = y$

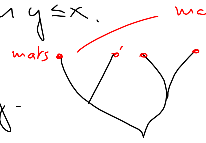
(iii) Transitiv: $x \leq y$ og $y \leq z$, så $x \leq z$.



Vi sier at $\leq$ er total dersom

(iv) for alle x,y er enten $x \leq y$ eller $y \leq x$.

maksimal men ikke største.



1. Maksimal x: Det finnes ingen y slik at $x < y$.
2. Største element x: $x \geq y$ for alle y.
3. Øvre skranke: Hvis $A \subseteq X$, så er b en øvre skranke for A dersom $b \geq a$ for alle $a \in A$.

Ekvivalensrelasjoner: $\sim$ er en ekvivalensrelasjon dersom

(i) Refleksiv: $x \sim x$

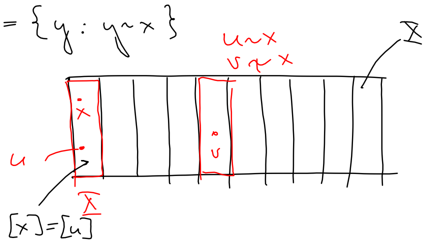
(ii) Symmetri: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(iii) Transitiv: $x \sim y$ og $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Ekvivalensklassen til x: $[x] = \{y : y \sim x\}$

$x \sim z \Rightarrow [x] = [z]$

$x \not\sim z \Rightarrow [x] \cap [z] = \emptyset$



$X/\sim \; = \{[x] : x \in X\}$ = mengden av alle ekvivalensklasser.

Anta $+$ er en operasjon på X. Vil definere en operasjon på $X/\sim$ ved:

$$[x] + [y] = [x+y]$$

Potensielt problem: $\neq$ ikke veldefinert

$x \sim z$, $u \sim y$: $[z] + [u] = [z+u]$

Sjekke at operasjonen er veldefinert

$x \sim z$ og $y \sim u \Rightarrow x+y \sim z+u$