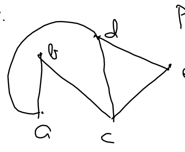
Planare grafer

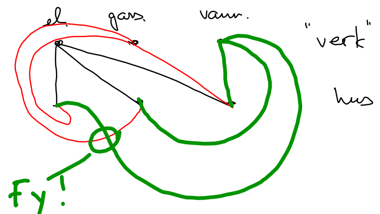
Definisjon: En planar graf er en graf som kan tegnes i planet uten at kantene krysser hverandre. En slik tegning kalles en planar representasjon av grafen.

Eks:



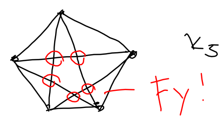
planar graf.

Ikke planar:

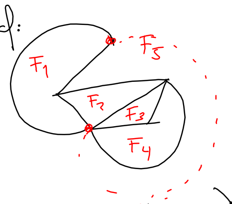


Bipartitte grafen $K_{3,3}$

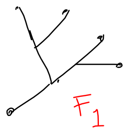
Kuratowskis teorem: En graf er planar hvis og bare hvis den ikke inneholder "kopier" av $K_{3,3}$ eller K_5.



Planar graf:



En planar representasjon av en graf deler planet inn i sammenhengende områder som kalles fasetter.



én fasett.

Eulers teorem: Anta at vi har en planar representasjon av en sammenhengende graf med n hjørner, e kanter, f fasetter. Da er

$$n-e+f=2.$$

Bevisskisse: Bruker induksjon på antall fasetter f.

Grunntrinnet $f=1$: I dette kan grafen ikke ha en sykel, og er derfor et tre. Dermed er $n=e+1$, dvs

$$n-e+1 = 1+1$$
$$n-e+f = 2$$

Induksjonstrinnet: Anta at resultatet holder for alle grafer med færre enn f fasetter og at G har f fasetter. Siden G har mer enn én fasett, har den en sykel, og hvis vi fjerner en kant som inngår i en sykel, slår vi sammen to fasetter. Dermed har vi en ny graf med $e-1$ kanter og $f-1$ fasetter. I den nye grafen holder relasjonen ved induksjon, så

$$n-(e-1)+(f-1)=2.$$
$$n-e+f=2 \qquad \text{HURRA!}$$

Korollar: Lager vi forskjellige planare representasjoner av samme graf, vil antall fasetter alltid være det samme.

Bevis: Alle tilfredsstiller Eulers formel

$$n-e+f=2 \Rightarrow f \text{ samme for alle representasjoner.}$$

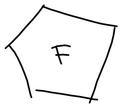
samme for alle representasjoner

Euler: $n-e+f=2 \Rightarrow f=2-n+e$

Korollar: I en planar graf med minst tre hjörner er

$$\boxed{e \le 3n-6}$$

Bevis (for grafer med flere enn tre hjörner): For hver fasett F, la deg(F) være antall kanter som er med å avgrense F.

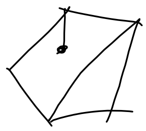


$\deg(F)=5$

Siden enhver kant avgrenser maksimalt to fasetter, har vi:

Hvis vi har flere enn tre hjörner, så er $\deg(F)\ge 3$

$$2e \ge \sum_{F\in\mathcal{F}} \deg(F) \ge 3f = 3(2-n+e)$$
$$= 6-3n+3e$$



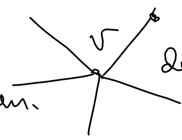
dvs. $2e \ge 6-3n+3e$

$3n-6 \ge e$

Korollar: I en planar graf finnes det alltid et hjörne som har 5 eller færre naboer (dvs $\deg(v)\le 5$)

Bevis: Nok å vise dette for grafer med flere enn 3 hjörner.
For hvert hjörne v la deg(v) være antall kanter som ender i v.

Observer at $\sum_{v\in V}\deg(v) = 2e$ (alle kanter tilhører to hjörner)



$\deg(v)=5$.

La δ være den minste graden til et hjörne i grafen.
Må vise at $\delta \le 5$.

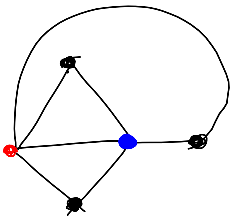
forrige resultat

$$\delta\cdot n \le \sum_{v\in V}\deg(v) = 2e \le 2(3n-6) = 6n-12$$

Dette betyr at $\delta < 6$, dvs at det finnes et hjörne med 5 eller færre naboer.

Fargelegging av grafer

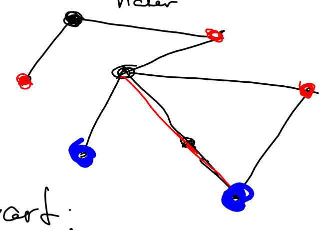
En *fargelegging* av en graf er en tilordning som gir hvert hjørne en farge slik at nabohjørner aldri har samme farge.



3-fargelegging av grafen.

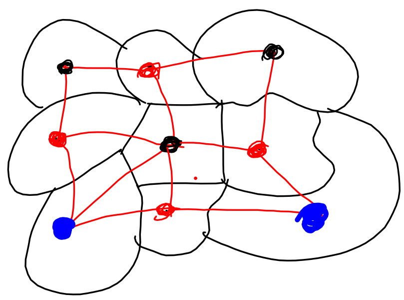
Firefargeteoremet: En planar graf kan alltid fargelegges med fire eller færre farger. } kun data-assisterte bevis

Praktisk nytte:



Lag hvor ingen hater hverandre

Fargelegging av kart:

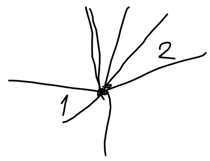


Naboland skal alltid ha forskjellig farge

Naboland: deler grensestykke.

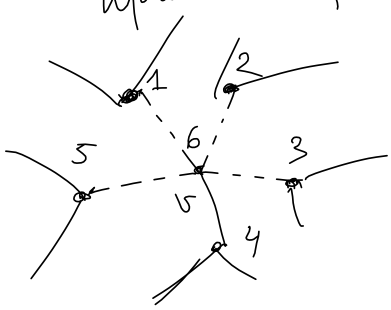
Landene er sammenhengende

Samme som fargelegging av planare grafer.



Seksfargeteorem: Enhver planar graf kan fargelegges med seks eller færre farger.

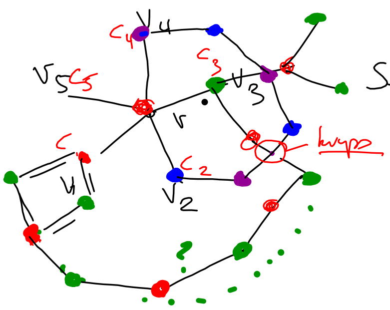
Bevis: Anta for motsigelse at dette ikke er tilfellet, og velg et minimalt moteksempel, altså en planar graf med færrest mulig hjørner som ikke er 6-fargbar. Vi vet at grafen inneholder et hjørne med færre enn 6 naboer.



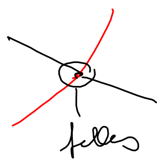
Lager en ny graf ved å fjerne v og alle tilhørende kanter. Grafen vi står igjen med, har færre enn n hjørner og er følgelig 6-fargbar. Farg denne grafen med 6 farger. Da bruker vi maksimalt 5 farger på naboene til v, og kan gi v den 6. fargen. Dermed har vi en fargelegging av G. Umulig!

Femfargeteoremet: Enhver planar graf kan farges med fem eller færre farger.

Bevis: Anta ikke og plukk en planar graf G med minimalt antall hjørner som ikke kan 5-fargelegges. Siden G er planar, finnes det et hjørne med 5 eller færre naboer. (kan anta at v har 5 naboer, ellers trivielt). Fjern v og alle tilhørende kanter, og fargelegg resten med fem farger.



Se på delgrafen som består av hjørner som er røde og grønne og kantene mellom dem.



To muligheter:

1. v_1 og v_3 i hver sin komponent i den rød-grønne grafen.
2. v_1 og v_3 er i samme komponent.

Hvis 1, så bytter vi fargene rød og grønn i den ene komponenten. Dette frigjør en farge som vi kan gi til v. Dette gir en fargelegging av G. UMULIG.

Hvis 2: Finnes en rødgrønn sti fra v_1 til v_3 $\Rightarrow$ UMULIG.

Antagelsen gal, teoremet bevist.