Funksjoner

$f: A \to B$

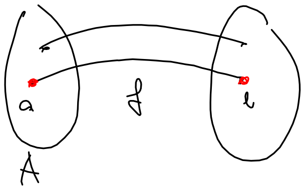
→ uformell definisjon: f er en tilordning som til hver $a \in A$ gir oss et element $f(a) \in B$.

→ formell definisjon: f er en delmengde av $A \times B$ slik at det for hver $a \in A$ finnes nøyaktig en $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$. Vi skriver $f(a) = b$.

f er injektiv: hvis $a_1 \neq a_2$, så $f(a_1) \neq f(a_2)$

f er surjektiv: hvis det for $b \in B$ finnes en $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

f er bijektiv: f er både injektiv og surjektiv (en-en-tydig korrespondanse)



f er bijektiv, har den en omvendt funksjon

$g: B \to A$ definert ved

$$g(b) = a \text{ der } f(a) = b.$$

Vi skriver f^{-1} for den inverse funksjonen.

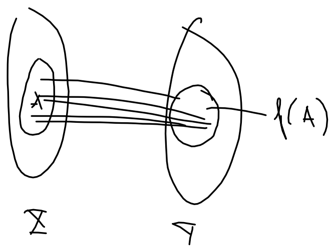
$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Direkte og inverse bilder: $f: X \to Y$

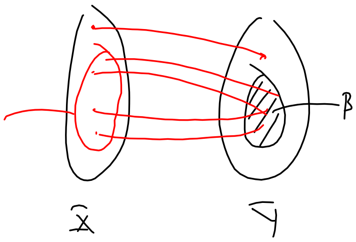
Hvis $A \subseteq X$, er bildet av f: $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$

Hvis $B \subseteq Y$, så er det inverse bildet $f^{-1}(B)$ definert ved

$$f^{-1}(B) = \{a \in X : f(a) \in B\}$$



$f^{-1}(B)$



Regneregler for inverse bilder:

(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A)$

(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A)$

(iii) $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

komplement med hensyn Y: $\overline{A} = Y - A$

komplement mhp X: $\overline{f^{-1}(A)} = X - f^{-1}(A)$

Regneregler for direkte bilder:

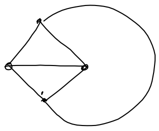
(i) $f\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f(A)$

(ii) $f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A)$

likhet hvis f er injektiv

Grafteori

$G = (V, E)$ V – hjørner, E – kanter $e = \{u, v\}$ $u, v \in V$, $u \neq v$

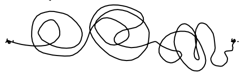


Vandring: $v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \dots \to v_n$

$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

Sti: En vandring som bare inneholder det samme hjørnet én gang: dvs $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ er forskjellige.

Dersom det finnes en vandring fra u til v, finnes det også en sti fra u til v:

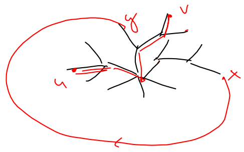


Sykel: $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \dots v_{n-1} \to v_0$
$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ er forskjellige } lengde minst 3.
(for å unngå

$v_0 \to v_1 \to v_0$)

Trær:

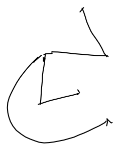
Definisjon: Et tre det er en sammenhengende graf uten sykler.



Teorem. Følgende er ekvivalent for en graf G.

(i) G er et tre
(ii) G er sammenhengende og $n = e + 1$ (antall hjørner, antall kanter)
(iii) G er sykelfri og $n = e + 1$
(iv) Mellom to hjørner u, v i G finnes det alltid nøyaktig en sti
(v) G er sykelfri, men legger vi til en kant, oppstår det en sykel.

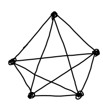
Utspenningstre: G en sammenhengende graf
T et tre som har de samme hjørnene som G, men som kan mangle noen av kantene.



utspenningstre

Planare grafer

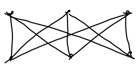
En planar graf er en graf som kan tegnes i planet uten at kantene krysser hverandre.



ikke planar

K_5

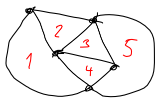
6



ikke planar.

$K_{3,3}$

Planar graf: Deler opp planet i fasetter



Eulers formel: G en planar graf, er

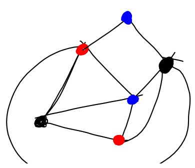
$$n - e + f = 2$$

hjørner kanter fasetter

OBS!

Fargelegging av grafer

Fargelegging: Gi alle hjørnene en farge slik at nabohjørner får forskjellige farger.



Firfargeteoremet: Enhver planargraf kan fargelegges med fire eller færre farger.

Fem.

Tallteori

Setning: Et tall $c \in \mathbb{Z}$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$c = sa + tb$$

av $a, b \in \mathbb{Z}$ hvis og bare hvis c er delelig med den største felles divisoren til a og b.

I praksis: Euklids algoritme:

Eksempel: Skriv 6 som en lin. komb. av 84 og 22 dersom det er mulig.

$$84 = 3 \cdot 22 + 18$$
$$22 = 1 \cdot 18 + 4$$
$$18 = 4 \cdot 4 + 2$$
$$4 = 2 \cdot 2$$

Største felles divisor for 84 og 22.

Siden 6 er delelig på 2, kan 6 skrives som en lin. komb. av 84 og 22

Skriver 2 som en lin. komb. av 84 og 22:

$$2 = 18 - 4 \cdot 4 = 18 - 4 \cdot (22 - 1 \cdot 18) = 5 \cdot 18 - 4 \cdot 22 = 5 \cdot (84 - 3 \cdot 22) - 4 \cdot 22$$
$$= 5 \cdot 84 - 19 \cdot 22$$

Ganger med 3:

$$6 = 15 \cdot 84 - 57 \cdot 22$$

Alternativ synsmåte

Setning: Anta at $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dersom ligningen

$$ax + by = c$$

har en heltallig løsning (x_0, y_0), så er de andre løsningene gitt ved

$$x_k = x_0 + k\frac{b}{d} \quad \text{og} \quad y_k = y_0 - k\frac{a}{d} \quad \text{for alle } k \in \mathbb{Z}$$

der $d = (a, b)$ er største felles faktor i a og b

Sjekker: $ax_k + by_k = ax_0 + k a\frac{b}{d} + by_0 - k b\frac{a}{d} = ax_0 + by_0 = c$

Restklasser

$t > 1$ naturlig tall: Definerer en ekvivalensrelasjon på $\mathbb{Z}$ ved

$$a \equiv b \pmod t \iff b - a \text{ er delelig med } t.$$

t ekvivalensklasser: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{t-1}$

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$$

$\overline{a}\overline{x} = \overline{a}\overline{y} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$

$(a,t) = 1$: $\overline{a}$ er invertibar, forkortningsregelen gjelder for $\overline{a}$, $\overline{a}$ er ikke en nulldivisor

$(a,t) > 1$: $\overline{a}$ ikke invertibar, forkortningsregelen gjelder ikke for $\overline{a}$, $\overline{a}$ er en nulldivisor.

Hvis t er et primtall, så er $(a,t) = 1$ for alle $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Ligningsløsning: $\overline{a}\overline{x} = \overline{c}$ har en løsning i $\mathbb{Z}/(t)$ hvis og bare hvis c er delelig med største felles divisor til a og t

Grunn: Anta at vi kan skrive c som en lin. komb. av a og t.

$$c = ax + tb \Rightarrow \overline{c} = \overline{a}\overline{x} + \underbrace{\overline{t}}_{=\overline{0}} \cdot \overline{b} = \overline{a}\overline{x}$$

Eksempel: Løs $\overline{22}\,\overline{x} = \overline{6}$ i $\mathbb{Z}/(84)$ $\quad a = 22, t = 84$

Skriver først 6 som en lin. komb. av 22 og 84. Har fått

$$6 = 15 \cdot 84 - 57 \cdot 22$$

I $\mathbb{Z}/(84)$

$$\overline{6} = \overline{15} \cdot \underbrace{\overline{84}}_{\overline{0}} + \overline{(-57)} \cdot \overline{22}$$

$$\overline{(-57)} \cdot \overline{22} = \overline{6} \qquad \text{Løsning: } \overline{x} = \overline{-57} = \overline{27}$$

Setning: Hvis x_0 er en løsning av ligning

$$\overline{a}\,\overline{x} = \overline{c} \quad \text{i } \mathbb{Z}/(t),$$

så er alle løsninger gitt ved

$$\overline{x}_k = \overline{x}_0 + \overline{k\frac{t}{d}} \quad \text{der } d = (a,t) \text{ og } k = 0, 1, 2, \ldots, d-1.$$

Annengradsligning i $\mathbb{Z}/(p)$: OBS: primtall.

$$\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{b}\bar{x} + \bar{c} = \bar{0}$$

Annengradsformelen: $\bar{x} = \dfrac{-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{b}^2 - \bar{4}\bar{a}\bar{c}}}{\bar{2}\bar{a}}$

primtall

Eksempel: $\bar{x}^2 - \overline{15}\,\bar{x} + \overline{15} = \bar{0}$ i $\mathbb{Z}/(43)$

Formel: $$\bar{x} = \frac{\overline{15} \pm \sqrt{\overset{225}{(\overline{15})^2} - \overset{60}{\bar{4}\cdot\bar{1}\cdot\overline{15}}}}{\bar{2}\cdot\bar{1}} = \frac{\overline{15} \pm \sqrt{\overline{165}}}{\bar{2}}$$

$$= \frac{\overline{15} \pm \sqrt{\overline{36}}}{\bar{2}} = \frac{\overline{15} \pm \bar{6}}{\bar{2}} = \begin{cases} \dfrac{\overline{21}}{\bar{2}} = \dfrac{\overline{64}}{\bar{2}} = \underline{\underline{\overline{32}}} \\[2ex] \dfrac{\bar{9}}{\bar{2}} = \dfrac{\overline{52}}{\bar{2}} = \underline{\underline{\overline{26}}} \end{cases}$$

$$\overline{165} \overset{-43}{=} \overline{122} \overset{-43}{=} \overline{79} \overset{-43}{=} \overline{36}$$

Eulers kriterium.

Setning: $\bar{a} \neq \bar{0}$ er en kvadratisk rest i $\mathbb{Z}/(p)$ hvis og bare hvis $\underbrace{\bar{a}^{\frac{p-1}{2}}}_{\pm 1} = \bar{1}$