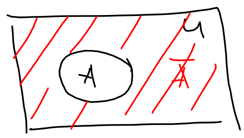
Regneregler for Boolske operasjoner



Husk: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x : x \text{ er med i alle } A_i\}$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x : x \text{ er med i minst én } A_i\}$

Univers U: $\bar A = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$

De Morgans lover: (i) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar A_1 \cap \bar A_2 \cap \dots \cap \bar A_n$

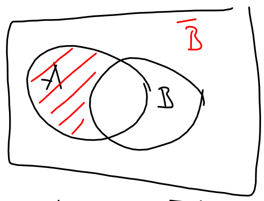
(ii) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \bar A_1 \cup \bar A_2 \cup \dots \cup \bar A_n$

Bevis: (i) Anta $x \in U$, vi må vise at $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ hvis og bare hvis $x \in \bar A_1 \cap \bar A_2 \cap \dots \cap \bar A_n$. Vi har

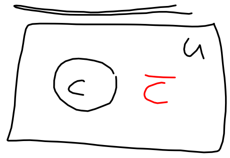
$x \in \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} \iff x \notin A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \iff x$ er ikke med i noen A_i

$\iff x$ er med i $\bar A_i$ for alle $i \iff x \in \bar A_1 \cap \bar A_2 \cap \dots \cap \bar A_n$

Eksempel: Vis at $A \setminus (B \cap \bar C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.



$A \setminus B = A \cap \bar B$



$A \setminus (B \cap \bar C) = A \cap \overline{(B \cap \bar C)} \overset{DM}{=} A \cap (\bar B \cup \bar{\bar C}) = A \cap (\bar B \cup C)$

$= (A \cap \bar B) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Indekserte familier

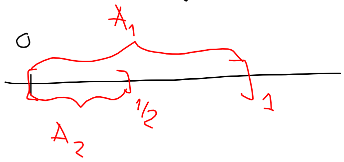
Anta at vi har en mengde A_n for hvert naturlig tall n.

Da er

$$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ en indeksert familie av mengder.}$$

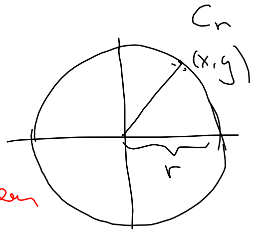
indeksmengden

notasjon $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$



<u>Eksempel</u>: $A_n = [0, \frac{1}{n}]$

$B_n = [-n, n]$



<u>Eksempel</u>: $C_r = \{(x,y) : x^2 + y^2 = r^2\}$

Familien av alle sirkler: $\{C_r : r \in (0,\infty)\}$ indeksmengden

$= \{C_r\}_{r\in(0,\infty)}$

<u>Definisjon</u>: Anta at I er en mengde og at vi til hver $\alpha \in I$ har en mengde A_α. Da kalles

$$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$$ en <u>familie indeksert</u> av I.

<u>Boolske operasjoner for indekserte familier</u>: $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$

(i) $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : x \text{ er med i } \underline{\text{alle}}\ A_\alpha\}$

(ii) $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : x \text{ er med i minst én } A_\alpha\}$

<u>Distributive lover</u>: (i) $B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} (B \cup A_\alpha)$

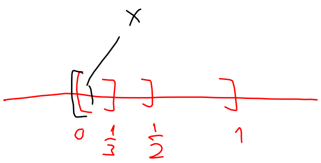
(ii) $B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} (B \cap A_\alpha)$

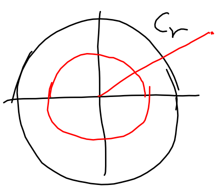
<u>De Morgans lover</u>: (i) $\overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$

(ii) $\overline{\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$

<u>Eksempel</u>: $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ $\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0,1]$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \underline{\{0\}}$





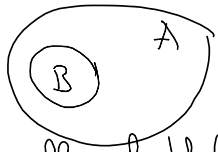
$C_r = \{(x,y) : x^2 + y^2 = r^2\}$

$\bigcap_{r\in(0,\infty)} C_r = \emptyset$, $\quad \bigcup_{r\in(0,\infty)} C_r = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Generelle familier

En familie er en mengde der elementene er mengder.

Eks: $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$



Eks: $\mathcal{A} = \{[a,b] : a \leq b\}$ = familien av alle lukkede, begrensede intervaller.

Notasjon: elementer: a, b, x, y små bokstaver

mengder av elementer: A, B, X, Y store bokstaver

familier (mengder av mengder): $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ skriftbokstaver

Boolske operasjoner: $\mathcal{A}$ er en familie

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : x \text{ er med i } A \text{ for alle } A \in \mathcal{A}\}$$

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : x \text{ er med i } A \text{ for minst én } A \in \mathcal{A}\}$$

Distributive lover:

(i) $$B \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (B \cap A)$$

(ii) $$B \cup \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (B \cup A)$$

De Morgans lover:

(i) $$\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$$

(ii) $$\overline{\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$$

Algebraer

Anta at X er en ikke-tom mengde og at $\mathcal{A}$ er en familie av delmengder av X.

Definisjon: Vi kaller $\mathcal{A}$ en algebra (av mengder) dersom følgende betingelser er oppfylt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ← sørger for at $\emptyset$ er med

(ii) Hvis $A \in \mathcal{A}$, så er $\bar{A} \in \mathcal{A}$. (komplement er med hensyn på X) — "lukket" under komplementer

(iii) Hvis $A, B \in \mathcal{A}$, så er $A \cup B \in \mathcal{A}$. ← "lukket" under unioner.

Eksempler: (i) $\mathcal{P}(X)$ er en algebra.

(ii) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ — " —

(iii) $\mathcal{A} = \{A : A$ eller $\bar{A}$ er endelig$\}$

Setning: Algebraer er lukket under snitt, dvs at dersom $A, B \in \mathcal{A}$, så er $A \cap B \in \mathcal{A}$

Bevis: Viser først at $A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}$:

$$\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \overset{DM}{=} \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = A \cap B$$

Nå kan vi vise at $A \cap B \in \mathcal{A}$: $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}$ ifølge (ii) $\Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{A}$ ifølge (iii)

$\Rightarrow \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \in \mathcal{A}$ ifølge (ii) $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ (siden $A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \in \mathcal{A}$.

Setning: Hvis $\mathcal{A}$ er en algebra og $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, så er

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}.$$

Bevis: Vet at dette er sant når $n = 2$ (fordi hvis $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, så $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$)

Fortsetter ved induksjon:

Antar at påstanden er sann for $n = k$ og må vise at den gjelder for $n = k+1$:

Vet: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \in \mathcal{A}$ når $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$

Må vise: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1} \in \mathcal{A}$ når $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1} \in \mathcal{A}$.

Har

$$\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}}_{\in \mathcal{A}} = \underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{A_{k+1}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \text{ pga (iii)}$$

Algebraer generert av delmengder

X er en ikke-tom mengde

$\mathcal{A}_0$ er en familie av delmengder av X som jeg gjerne ville skulle være en algebra.

(i) Er $\emptyset \in \mathcal{A}_0$?
(ii) Hvis $A \in \mathcal{A}_0$, er da $\bar{A} \in \mathcal{A}_0$?
(iii) Hvis $A, B \in \mathcal{A}_0$, er da $A \cup B \in \mathcal{A}_0$?

Hvis nei, kan vi utvide $\mathcal{A}_0$ så den blir en algebra?

Skritt 1: Sett $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \{\emptyset\}$ (bare 1 oppfylt).

Skritt 2: $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}_1\} \cup \{A \cup B : A, B \in \mathcal{A}_1\}$

Skritt $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 \cup \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}_2\} \cup \{A \cup B : A, B \in \mathcal{A}_2\}$

osv.

$$\underbrace{\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n}$$ er en algebra.

$\mathcal{A}$ kalles algebraen generert av $\mathcal{A}_0$ – det er den minste algebraen som inneholder $\mathcal{A}_0$. Den kalles algebraen generert av $\mathcal{A}_0$

Setning: Anta at $\mathcal{A}_0$ er en familie av delmengder av X. Da fins det en minste algebra $\mathcal{A}$ av delmengder av X som inneholder $\mathcal{A}_0$

(hvis $\mathcal{B}$ er en annen algebra som inneholder $\mathcal{A}_0$, så $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$)

Bevisskisse: La α være samlingen av alle algebraer $\mathcal{B}$ slik at $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}$. Siden $\mathcal{P}(X) \in \alpha$, er α ikke-tom. Sett

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B} \in \alpha} \mathcal{B}$$

Vi må vise at $\mathcal{A}$ er den minste algebraen som inneholder $\mathcal{A}_0$. Det holder å vise at $\mathcal{A}$ er en algebra. Må sjekke egenskapene:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$. Siden alle $\mathcal{B}$'ene er algebraer, er $\emptyset$ med i dem alle, og dermed er $\emptyset \in \bigcap_{\mathcal{B} \in \alpha} \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$. Hvis $A \in \mathcal{A}$, så er $A \in \mathcal{B}$ for alle $\mathcal{B} \in \alpha$. Siden $\mathcal{B}$-ene er algebraer, er dermed $\bar{A} \in \mathcal{B}$ for alle $\mathcal{B}$, og dermed er $\bar{A} \in \mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B} \in \alpha} \mathcal{B}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$. Hvis $A, B \in \mathcal{A}$, så er $A, B \in \mathcal{B}$ for alle $\mathcal{B} \in \alpha$.

Men $\mathcal{B}$'ene er algebraer, så $A \cup B \in \mathcal{B}$ for alle $\mathcal{B} \in \alpha$.

$A \cup B \in \mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B} \in \alpha} \mathcal{B}$