Matematikkens språk

Interessert i påstander som er sanne eller gale:

Eks: $5+4=9$ sant

$2+3>7$ usant

Åpne utsagn $2x+1>3$ avhengig av x

Åpne utsang $x^2+y^2=-1$ usant, men åpent

Logiske konnektiver binder sammen utsagn

og: $\wedge$ medfører $\Longrightarrow$

eller: $\vee$ ekvivalent $\Longleftrightarrow$

ikke: $\sim$ (alternativ $\neg$)

Kvantorer: $\forall$ (allkvantor) "for alle"/"for enhver"

$\exists$ (eksistenskvantor) "det eksisterer"/"det finnes"

Vi antar at vi har noen grunnleggende utsagn P, Q, R som vi kombinerer ved hjelp av konnektiver og kvantorer.

Av og til markerer vi variable: $P(x)$, $Q(x,y)$

$P(x)$: $2x+7=3$, $Q(x,y)$: $x=e^{y^2}$

Konjunksjoner: $P \wedge Q$ "P og Q"

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

} Sannhetsverditabell

Disjunksjon: $P \vee Q$ "P eller Q"

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Negasjon: $\sim P$ "ikke P"

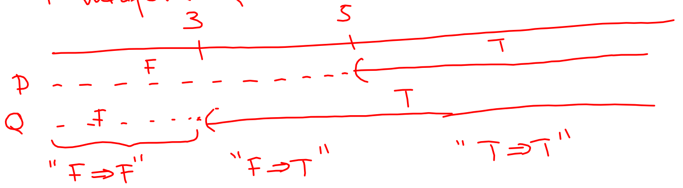
P	$\sim P$
T	F
F	S

Implikasjon: $P \Rightarrow Q$ "P impliserer Q", "P medfører Q", "Hvis P, så Q"

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Eksempel: P: $x > 5$ Q: $x > 3$

"P medfører Q" altså $P \Rightarrow Q$ bør være sann for alle x.



Ekvivalens: $P \Leftrightarrow Q$ "P ekvivalent med Q" "P hvis og bare hvis Q"

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Eksempel: $(P \wedge Q) \vee \sim R$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\sim R$	$(P \wedge Q) \vee \sim R$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

Eksempel: $\sim P \vee Q$

P	Q	$\sim P$	$\sim P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

To utsagn er logisk ekvivalente dersom de har samme sannhetsverditabell. Så $\sim P \vee Q$ og $P \Rightarrow Q$ er logisk ekvivalent.

Boka skriver $\sim P \vee Q = P \Rightarrow Q$ for å markere at utsagnene er logisk ekvivalente (helt uvanlig!)

Eksempel: $\sim Q \Rightarrow \sim P$

P	Q	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \Rightarrow \sim P$	$P \Rightarrow Q$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T

$(\sim Q \Rightarrow \sim P) = (P \Rightarrow Q)$ Vi kaller $\sim Q \Rightarrow \sim P$ det kontrapositive utsagnet til $P \Rightarrow Q$.

Distributive lover: (i) $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(i) $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Sjekker (i):

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

De Morgans lover: (i) $\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$

(ii) $\sim(P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q$

Sjekker (i):

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Eksempel på bruk av lover: Vis at

$$\sim(P \wedge \sim Q) \wedge \sim R = \sim(P \vee R) \vee (Q \wedge \sim R)$$

"Regner litt": $\sim(P \wedge \sim Q) \wedge \sim R \overset{DM}{=} (\sim P \vee \sim\sim Q) \wedge \sim R = (\sim P \vee Q) \wedge \sim R$

$\overset{Distr.}{=} (\sim P \wedge \sim R) \vee (Q \wedge \sim R) \overset{DM}{=} \sim(P \vee R) \vee (Q \wedge \sim R)$

Husk: $P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$ $\qquad P \Leftrightarrow Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

$P \Rightarrow Q = \neg Q \Rightarrow \neg P$

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$

$\sim(P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q$

Kvantorer

$P(x)$ $\quad \forall x P(x)$ er sant dersom $P(x)$ er sann for alle x

$\exists x P(x)$ er sant dersom $P(x)$ er sann for minst én x.

Eksempel: $\forall x\ (3x+1=2)$ galt.

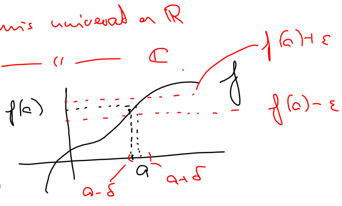
$\exists x\ (3x+1=2)$ sant (holder for $x=\frac{1}{3}$)

"Universet" er viktig men ofte underforstått.

$\exists x\ (x^2=-1)$ usann hvis universet er $\mathbb{R}$

sann — " — $\mathbb{C}$

Eksempel: kontinuitet i et punkt:



For enhver ($\forall$) $\varepsilon>0$ finnes det ($\exists$) en $\delta>0$ slik at for alle x ($\forall$) slik at $|x-a|<\delta$, så er $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

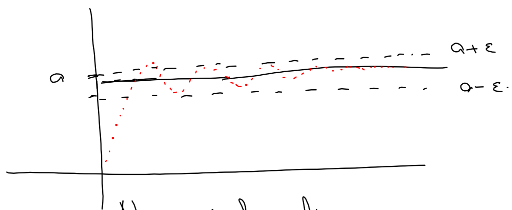
$$\underbrace{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x}_{\text{Rekkefølgen spiller en rolle}}\left(|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon\right)$$

Negasjon av kvantorer:

$$\sim\forall x P(x) = \exists x(\sim P(x))$$
$$\sim\exists x P(x) = \forall x(\sim P(x))$$

kan trekke $\sim$ gjennom kvantorer, men da bytter kvantorene type.

Eksempel: $x_n \to a$: For alle $\varepsilon>0$ finnes det en N slik at når $n\geq N$ så er $|x_n-a|<\varepsilon$



$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N\ (|x_n-a|<\varepsilon)$$

Negerer utsagnet:

$$\sim\forall\varepsilon>0\exists N\forall n\geq N(|x_n-a|<\varepsilon) = \exists\varepsilon>0\sim\left[\exists N\forall n\geq N(|x_n-a|<\varepsilon)\right]$$

$$= \exists\varepsilon>0\ \forall N \sim\forall n\geq N[|x_n-a|<\varepsilon] = \exists\varepsilon>0\forall N\exists n\geq N[\underbrace{\sim|x_n-a|<\varepsilon}_{|x_n-a|\geq\varepsilon}]$$

$$= \exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n\geq N(|x_n-a|\geq\varepsilon)$$

ADVARSEL: Noen utsagn inneholder skjulte/underforståtte kvantorer.

Eksempel: $\underbrace{\text{Hvis } x\geq 5, \text{ så er } x>4,}_{\text{For alle } x, \text{ hvis } x\geq 5, \text{ så } x>4.}$

$$P\Rightarrow Q \equiv \sim P\vee Q$$

$\forall x\ [x\geq 5 \Rightarrow x>4]$ ← sant

Negasjon: $\sim\forall x\ [x\geq 5\Rightarrow x>4] = \exists x \sim[x\geq 5 \Rightarrow x>4]$

$$= \exists x\sim[\sim(x\geq 5)\vee x>4] = \exists x\ [\sim\sim(x\geq 5)\wedge\sim(x>4)]$$

$$= \exists x\ [x\geq 5 \wedge x\leq 4]$$ ← galt.