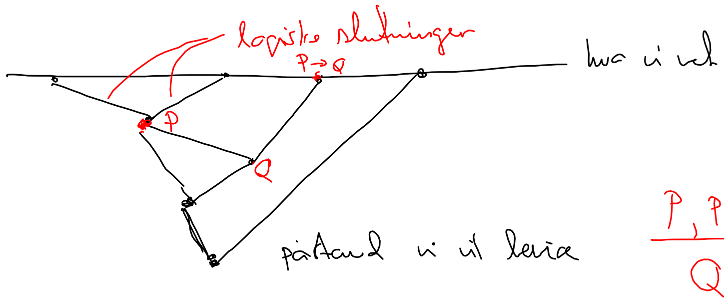
Bevis

Matematikk:
- bevise påstander
- teorier bygget opp bevist påstander

Opplysning:



$$\frac{P,\ P \to Q}{Q} \quad \text{Modus ponens}$$

$$\frac{\forall x\, P(x)}{P(a)}$$

Mange matematiske teoremer er på formen
$P \Rightarrow Q$

Setning: Hvis n er et oddetall, så er n^2 også et oddetall

Setning: Hvis a, b, c er hhv. katetene og hypotenusen i en rettvinklet trekant, så er $a^2 + b^2 = c^2$

En annen vanlig variant: hvis og bare hvis: $P \Leftrightarrow Q$

Setning: En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.

Husk at $P \Leftrightarrow Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Noen hvis-så utsagn er forkledd:

premiss konklusjon

Teorem: Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da har f et maksimumspunkt $c \in [a,b]$

kan omformuleres:

Hvis $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, så . . . . . .

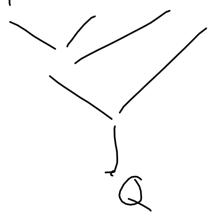
Noen teoremer passer ikke inn i hvis-så-malen:

Setning: Vinkelsummen i en trekant er $180°$.

Setning: Det finnes uendelig mange primtall.

Direkte bevis for $P \Rightarrow Q$ utsagn

Anta P



Eksempel:

Setning: Hvis n er et oddetall, så er n^2 et oddetall.

n oddetall: $n = 2k+1$, k et heltall.

Bevis: Hvis n er et oddetall, så er $n = 2k+1$ for et helt tall k.

Vi har $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{\text{heltall}} + 1 \leftarrow$ oddetall.

Setning: Hvis a er delelig med c og b er delelig med d, så er ab delelig med cd.

a delelig med c ⇔ $\frac{a}{c} = k$ et heltall
$\boxed{a = kc \text{ for et heltall } k}$

Bevis: Siden a er delelig med c, finnes det et heltall k slik $a = kc$. Siden b er delelig med d, finnes det en heltall m slik at $b = md$.

$ab = (kc)(md) = (km)(cd)$, altså ab delelig med cd (fordi $\frac{ab}{cd} = km$)

Setning: Summen av to rasjonale tall er rasjonal.

(Hvis r, s er rasjonale, så er $r+s$ rasjonal)

r rasjonal, $r = \frac{a}{b}$ der a, b er hele tall

Bevis: Hvis r, s er rasjonale, så finnes det hele tall a, b, c, d slik $r = \frac{a}{b}$ og $s = \frac{c}{d}$. Dermed

$$r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

heltall — et rasjonalt tall.

heltall

Kontrapositive bevis

Husk at $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

I et kontrapositivt bevis av $P \Rightarrow Q$, beviser vi isteden det logisk ekvivalente utsagnet $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Hvorfor? Fordi det kan være lettere å utnytte informasjonen i $\sim Q$ enn i P.

$a^2 = 2k$

Eksempel: Setning: Hvis a^2 er et partall, så er a et partall.

P: a^2 er et partall
$\sim P$: a^2 er et oddetall
Q: a er et partall
$\sim Q$: a er et oddetall

Kontrapositivt utsagn: $\sim Q \Rightarrow \sim P$: a er et oddetall $\Rightarrow$ a^2 er et oddetall

$$a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$$
$$= 2(2k^2+2k)+1 \leftarrow \text{oddetall.}$$

Bakgrunnen: $1+x+x^2+\cdots+x^{p-1} = \dfrac{x^p-1}{x-1}$, $x \neq 1$, geometrisk rekke.

Ganger med $(x-1)$ på begge sider: $x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)$ utvidete konjugatsetningen

$$x^2-1 = (x-1)(x+1) : p=2$$

Setning: Hvis 2^n-1 er et primtall, så er n et primtall.

Bevis: Kontrapositivt utsagn: $\sim Q \Rightarrow \sim P$

P: 2^n-1 et primtall
$\sim P$: 2^n-1 er et sammensatt primtall
Q: n et primtall
$\sim Q$: n er et sammensatt tall

n er et sammensatt tall $\Rightarrow$ 2^{n-1} er et sammensatt tall

$n = ab$ med $a, b > 1$.

Derfor $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$

Bruker formelen ovenfor med $x = 2^a$, $p = b$.

$$= \underbrace{(2^a-1)}_{\text{heltall} > 1}\underbrace{((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \cdots + 1)}_{\text{heltall} > 1}$$

hurra, 2^n-1 er et sammensatt tall.

Motsigelsebevis (reductio ad absurdum)

ekstra vektlegg

Vi skal bevise at P er sann. Vi antar da at P ikke er sann og viser at det fører til en selvmotsigelse. Dette betyr at P er sann.

Formelt: Vil bevis P.
Beviser: $\sim P \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ } logiske ekvivalent

P	C	$\sim P$	$\sim C$	$C \wedge \sim C$	$\sim P \Rightarrow (C \wedge \sim C)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F

Teorem: $\sqrt{2}$ er irrasjonal.

Bevis: Anta at påstanden er gal, dvs at $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall.

Da kan $\sqrt{2}$ skrives som en brøk

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$ der a, b er hele tall uten felles faktorer.

Kvadrer:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2$$ er et partall, så a er et partall

Det betyr at $a = 2k$ for et helt tall k.

$$2b^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2$$ er et partall, dvs b er et partall

2 er en felles faktor i a og b. Selvmotsigelse

Eksempel: Setning: Summen av et rasjonalt tall og et irrasjonalt tall er alltid irrasjonalt.

Bevis: Anta at setningen er gal, da finnes det et rasjonalt tall r og et irrasjonalt tall a slik at summen $s = r + a$ er rasjonal.

Skriver om

$$a = \underbrace{s - r}_{\text{rasjonal}}$$

irrasj, rasj, rasj

} Selvmotsigelse - et tall kan ikke være både rasjonalt og irrasjonalt.

Teorem: Det finnes uendelig mange primtall.

Bevis: Anta for motsigelse at det bare finnes endelig mange primtall

$2, 3, 5, 7, \ldots, P$. Se på tallet

$$N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot P + 1$$

Dette tallet

(i) kan ikke være et primtall siden det er større enn alle sammen.

(ii) kan ikke være et sammensatt tall for da ville det være delelig med et primtall q, og det er det ikke:

$$\frac{N}{q} = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots q \ldots P + 1}{q} = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots \cancel{q}\ldots P + \frac{1}{q}$$ ikke et helt tall

Dette er umulig siden ethvert helt tall større enn 1 er enten et primtall eller et sammensatt tall.

Et lite gjensyn med ekvivalenser

Teorem: Følgende er ekvivalent

(i) A er inverterbar

(ii)

⋮

(vii) $\det(A) \neq 0$