# Relasjoner

I virkeligheten verden: "x er forelder til y"
"x er høyere enn y"

I matematikkens verden: x er mindre enn y "$x<y$"
x er delelig på y "$y|x$"
l og m er parallelle "$l \| m$"

Definisjon: En relasjon R på en mengde X er en delmengde av $X^2$, dvs R er en mengde av ordnede par $(u,v)$ der $u,v \in X$.

Notasjon: Istedenfor $(u,v) \in R$ skriver vi gjerne $uRv$.

Eksempel: Relasjonen $<$ på mengden $\{1,2,3,4\}$ "$x<y$" "x er mindre enn y"

$$< = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

Andre varianter: Relasjoner med flere enn to elementer
"x og y er foreldre til z"
"$x+y>z$"

En relasjon med n variable: En delmengde av $X^n$

Relasjoner mellom mengder: Bøkene i et bibliotek: B
Lånere i biblioteket: L

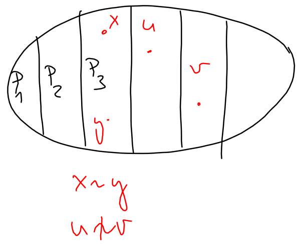
"x har vært lånt av y" $xRy$

Denne relasjonen er en delmengde av $B \times L$

Matematisk eksempel: En relasjon på $X \times \mathcal{P}(X)$:
$x \in A$ "x er element i A"

# Ekvivalensrelasjoner

Anta at vi har en mengde $X$.




En partisjon $\mathcal{P}$ av $X$ er en samling delmengder av $X$ slik at

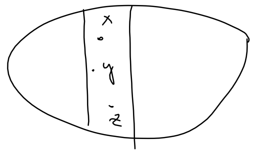
(i) Elementene i $\mathcal{P}$ er disjunkte, dvs at hvis $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, så $P_1 \cap P_2 = \emptyset$

(ii) $X = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$

Gitt en partisjon, kan vi innføre en relasjon $\sim$ ved

$x \sim y \iff x, y$ tilhører samme partisjonsklasse $P$ i $\mathcal{P}$.

Denne relasjonen har følgende egenskaper:




(i) Refleksiv: $x \sim x$ for alle $x \in X$

(ii) Symmetri: Hvis $x \sim y$, så $y \sim x$

(iii) Transitiv: Hvis $x \sim y$ og $y \sim z$, så $x \sim z$.

Definisjonen: En relasjon $\sim$ på $X$ kalles en ekvivalensrelasjon dersom de tre egenskapene ovenfor er oppfylt

(i) Refleksiv: $x \sim x$ for alle $x \in X$

(ii) Symmetri: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(iii) Transitivitet: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

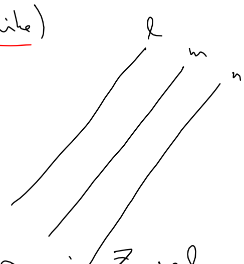
Eksempel: $X$ = mengden av alle linjer i planet.

$l_1 \sim l_2 \iff l_1$ og $l_2$ er parallelle (eller like)

(i) $l \sim l$

(ii) $l \sim m \Rightarrow m \sim l$

(iii) $l \sim m$ og $m \sim n \Rightarrow l \sim n$




Eksempel: Anta at $n \in \mathbb{N}$. Definer en relasjon på $\mathbb{Z}$ ved

$a \sim b \iff b - a$ er delelig med $n$

a er delelig på b dersom det finnes en $n \in \mathbb{Z}$ slik at $a = nb$

Dette er en ekvivalensrelasjon:

(i) $a \sim a$ fordi $a - a$ er delelig med $n$: $a - a = 0 \cdot n$

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$: Hvis $a \sim b$, så er $b - a = kn$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Da er $a - b = (-k)n$, noe som betyr at $a - b$ er delelig med $n$, dvs $b \sim a$

(iii) $a \sim b$ og $b \sim c \Rightarrow a \sim c$: Vet $b - a = kn$ og $c - b = mn$ for hele tall $k, m$. Skal vise at $c - a$ er delelig med $n$

Vi har $(c - b) + (b - a) = c - a$, så

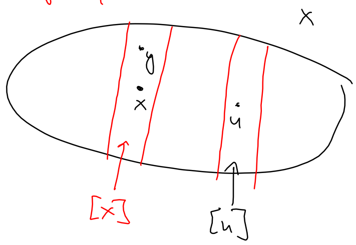
$c - a = mn + kn = (m+k)n$ dus $a \sim c$.

Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på en mengde $X$

For hver $x \in X$ lar vi ekvivalensklassen $[x]$ være

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

Målet er av vis at ekvivalensklassene gir en partisjon av $X$




Oppklaringer: $\sim$ ($\sim P$ ikke-$P$) $\neg$

$\sim$ ($A \sim B$ $A$ er ekvivalent med $B$)

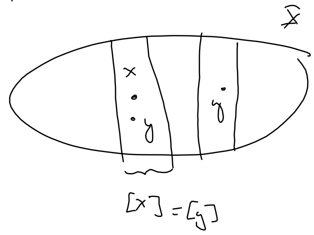
logikk ekvivalensrelasjon

"logisk ekvivalent" $\neq$ ekvivalent

Teorem: Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på $X$. Da gjelder

(i) Hvis $x \not\sim y$, så er $[x] \cap [y] = \emptyset$

(ii) Hvis $x \sim y$, så er $[x] = [y]$




Bevis: (i) Argumenterer kontrapositivt, altså

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow x \sim y$$

Hvis $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, så finnes det en $z \in [x]$ og $z \in [y]$.

$P \Rightarrow Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

dvs $z \sim x$ og $z \sim y$. Dermed $x \sim z$ og $z \sim y$, og ved transitivitet er $x \sim y$.

Symm.

(ii) Anta nå at $\boxed{x \sim y}$. Viser først at $[x] \subseteq [y]$ og deretter at $[y] \subseteq [x]$.

Anta først at $z \in [x]$, dvs $z \sim x$. Siden $x \sim y$, gir transitivitet at $z \sim y$, dvs $z \in [y]$.

Anta så at $z \in [y]$, dvs $z \sim y$. Siden $x \sim y$, så gir symmetri at $y \sim x$. Dermed $z \sim y$ og $y \sim x$, så ved transitivitet er $z \sim x$, dvs $z \in [x]$.

Følgelig er $[x] = [y]$.

---

Observer at $x \in [x]$ siden $x \sim x$

Teorem: Hvis $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på $X$, så danner ekvivalensklassene en partisjon på $X$; dvs enten er to ekvivalensklasser [like hvis $x \sim y$] eller så er de disjunkte (hvis $x \not\sim y$), og alle elementer er med i en ekvivalensklasse ($x \in [x]$).

Partisjon $\rightleftarrows$ ekvivalensrelasjon

Eksempel: $X = \{f : f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$

Definer en relasjon på $X$ ved: $f \sim g \iff f-g$ er kontinuerlig

Sjekker at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon:

(i) Refleksiv: $f\sim f$ fordi $f-f=0$ er kontinuerlig.

(ii) Symmetri: Anta $f\sim g$. Da er $f-g$ kontinuerlig, men da er $g-f=-(f-g)$ også kontinuerlig, dvs $g\sim f$.

(iii) Transitivitet: Anta at $\underbrace{f\sim g}_{\substack{f-g \\ \text{er kont}}}$ og $\underbrace{g\sim h}_{\substack{g-h \\ \text{er kont}}}$, må vise at $\underbrace{f\sim h}_{\substack{?\\ f-h \text{ er} \\ \text{kont.}}}$

Siden $f-h = \underbrace{(f-g)}_{\text{kont}}+\underbrace{(g-h)}_{\text{kont}}$, er $f-h$ summen av to kontinuerlige funksjoner og dermed kontinuerlig selv.

Hvordan ser ekvivalensklassen til $f$ ut?

$$[f] = \{g : g\sim f\} = \{g : \underbrace{g-f}_{h} \text{ er kontinuerlig}\} \qquad g-f=h \Rightarrow g=f+h$$

$$= \{g : g = f+h \text{ for en kontinuerlig } h\}$$

Eksempel: $X=\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z): x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$$(x,y,z)\sim(x',y',z') \iff 4x-3y+2z = 4x'-3y'+2z'$$

Dette er en ekvivalensrelasjon:

(i) Refleksivitet: $(x,y,z)\sim(x,y,z)$ : $4x-3y+2z=4x-3y+2z$ OK.

(ii) Symmetri: $\underbrace{(x,y,z)\sim(x',y',z')}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(x',y',z')\sim(x,y,z)}$

$$4x-3y+2z=4x'-3y'+2z' \Rightarrow 4x'-3y'+2z' = 4x-3y+2z$$

(iii) Transitiv: $\underbrace{(x,y,z)\sim(x',y',z')}$ og $\underbrace{(x',y',z')\sim(x'',y'',z'')}$

Skal vise $(x,y,z)\sim(x'',y'',z'')$

$$4x-3y+2z = 4x'-3y'+2z' = 4x''-3y''+2z''$$

dvs $\underbrace{4x-3y+2z = 4x''-3y''+2z''}_{(x,y,z)\sim(x'',y'',z'')}$

Hva er partisjonklassen til $(x,y,z)$: La $a = 4x-3y+2z$

Hva betyr det at $(x',y',z')\sim(x,y,z)$? $4x'-3y'+2z'=a$

ligning for et plan

$[(x,y,z)]$ = Planet gjennom punktet $(x,y,z)$ med normalvektor $(4,-3,2)$.