21/5 - 2013

MAT2400

Metriske rom

Definisjon: Mengde X, funksjon $d: X \times X \to \mathbb{R}$ slik at
(i) $d(x,y) \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $x = y$
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$
(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (trekantulikheten)

Omvendt trekantulikhet: $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

Viktige eksempler: $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}(X,Y)$, L^1, L^2

Hvor kommer metrikken fra?: Normer: $d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{y} - \bar{x}\|$
Indreprodukt:
$d(x,y) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \langle \bar{x}-\bar{y}, \bar{x}-\bar{y} \rangle^{1/2}$

Konvergens: $x_n \to x$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $d(x_n, x) < \varepsilon$ for alle $n \geq N$

Ekvivalent: $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$

Viktige mengder:

åpne
- ingen randpunkter er med
- alle punkter i mengden er indre
- komplementet er lukket

lukkede
- alle randpunkter er med i mengden
- alle konvergente følger fra mengden konvergerer til punkt i mengden
- komplementet er åpent

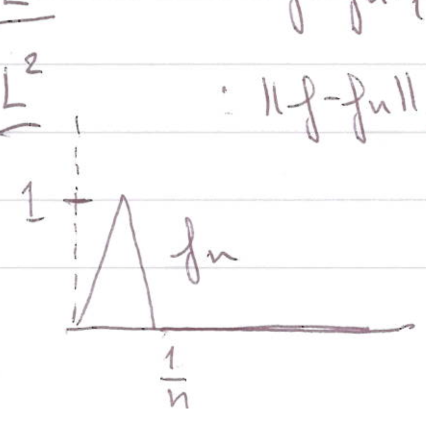
kompakt
- alle følger fra mengden har en delfølge som konvergerer i mengden
- lukket og totalt begrenset
- enhver åpen overdekning har en endelig deloverdekning

Spesialbeskrivelser: I $\mathbb{R}^n$: kompakt $\Leftrightarrow$ lukket og begrenset
I $\mathcal{C}(X,Y)$: lukket, begrenset og ekvikontinuerlig.

Når man skal vise at en mengde er åpen/lukket/kompakt, gjelder det å velge den riktige beskrivelsen (det finnes flere enn ovenfor!)

Konvergens av funksjonsfølger

Punktvis: $f_n(x) \to f(x)$ for alle x
Nesten overalt: $f_n(x) \to f(x)$ unntatt for x i en mengde av mål 0
Uniform: For hver $\varepsilon > 0$, finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq N$, så er $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ for alle x
L^1 : $\|f - f_n\|_1 = \int |f - f_n| \, d\mu \to 0$
L^2 : $\|f - f_n\|_2 = \left(\int |f - f_n|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \to 0$



punktvis, men ikke uniform.

Grenseresultater: f_n kont., $f_n \to f$ uniformt $\Rightarrow$ f kont.

f_n kont., $f_n \to f$ uniformt $\Rightarrow$ $\int_a^b f_n dx \to \int_a^b f\,dx$

$f_n' \to g$ uniformt, $f_n(x_0) \to$ i ett punkt $\Rightarrow$ $f_n \to h$ unif og $h' = g$.

f_n pos. målbare, $f_n \uparrow f$, så $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ Monoton konvergens teorem

f_n målbar, $f_n \to f$, integrerbar g, $|f_n| \leq g \Rightarrow \int f_n d\mu \to \int f d\mu$ Dominert konvergens teorema

f_n pos målbar, $\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$ Fatous lemma

Kontinuerlige funksjoner

Beskrivelser: (i) f er kontinuerlig i a dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ for alle x slik at $d(x,a) < \delta$.

(ii) f er kontinuerlig i a dersom $f(x_n) \to f(a)$ for alle følger $\{x_n\}$ som konvergerer til a.

(iii) Det inverse bildet til en omegn om $f(a)$ er en omegn om a.

f er kontinuerlig hvis den er kontinuerlig i alle punkter $x \in X$.

f kont $\Longleftrightarrow f^{-1}(O)$ åpen for alle åpne O

f kont $\Longleftrightarrow f^{-1}(F)$ er lukket for alle lukked F.

<u>Men</u>: Hvis f er kontinuerlig og K er kompakt, så er $f(K)$ <u>kompakt</u>.

<u>Uniform kontinuitet</u>: f er <u>uniform kontinuerlig</u> på A hvis det for alle $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ for alle $x, y \in A$ med $d(x,y) < \delta$.

<u>Teorem</u>: På en kompakt mengde er alle kontinuerlig funksjoner uniformt kontinuerlig

<u>Ekvikontinuerlig</u>: En familie $\{f_n\}$ av funksjoner er ekvikontinuerlig på A dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ for alle n og alle $x, y \in A$ med $d(x,y) < \delta$.

<u>Kompletthet</u>

<u>Definisjon</u>: Et rom er komplett dersom enhver Cauchy-følge konvergerer.

<u>Setning</u>: Enhver lukket delmengde av et komplett rom er komplett.

<u>Eksempler på komplette rom</u>: $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(X, Y)$, X kompakt, Y komplett
L^1, L^2

Banachs fikspunktteorem: Anta at X er et komplett metrisk rom. Enhver kontraksjon $f: X \to X$ har et entydig fikspunkt x_∞ som kan nås ved iterasjon fra et hvilket som helst startpunkt $x_0 \in X$: Følgen $x_n = f^{(n)}(x_0)$ konvergerer mot x_∞ uansett hvilket startpunkt $x_0 \in X$ vi velger.