28/5 - 2013

MAT2400

Målrom

Et <u>målrom</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$ består av en mengde X, en σ-algebra $\mathcal{A}$ av delmengder av X og et mål μ på $\mathcal{A}$.

<u>σ-algebra</u>: $\mathcal{A}$ må tilfredsstille

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (lukket under komplement)

(iii) Hvis $A_n \in \mathcal{A}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så er $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (lukket under tellbare unioner)

<u>Mål</u>: $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ må tilfredsstille

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ for alle <u>disjunkte</u> følge $\{A_n\}$ fra $\mathcal{A}$.

Noen nyttige egenskaper ved mål: (alle mengder er antatt med i $\mathcal{A}$)

(i) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) $A \subset B$ og $\mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(iii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(iv) Hvis $\{E_n\}$ er en <u>voksende</u> familie, så er
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$$

(v) Hvis $\{E_n\}$ er en <u>avtagende</u> familie og $\mu(E_1) < \infty$, så er
$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$$

(iv)-(v) kalles <u>kontinuitet</u> <u>av</u> <u>mål</u>

Målbarhet

Gitt et ~~[illegible]~~ målrom $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sier vi at A er <u>målbar</u> (eller $\mathcal{A}$-<u>målbar</u>) dersom $A \in \mathcal{A}$. Dersom vi arbeider med et ytre mål, har målbarhet en mer komplisert betydning

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \text{ for alle } B \subset X,$$

men denne er vanligvis irrelevant når vi arbeider i noe som allerede er et målrom

En funksjon er <u>målbar</u> hvis og bare hvis én av betingelsene nedenfor er oppfylt

(i) $f^{-1}([-\infty, r)) \in \mathcal{A}$ for alle r (heftets definisjon)

(ii) $f^{-1}([-\infty, r]) \in \mathcal{A}$ —"—

(iii) $f^{-1}([r, \infty]) \in \mathcal{A}$ —"—

(iv) $f^{-1}((r, \infty)) \in \mathcal{A}$ —"—

(v) $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ for alle åpne O

ekvivalente betingelser.

Nyttige egenskaper ved målbare funksjoner.

(i) f, g målbare $\Rightarrow$ $f+g$, fg målbare

(ii) f_n målbare $\Rightarrow$ $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ og $\lim_{n\to\infty} f_n$ (dersom den finnes) målbare.

(iii) φ kontinuerlig, f målbar $\Rightarrow$ $\varphi \circ f$ målbar.

Integrasjon

<u>Integrasjon av enkle funksjoner:</u> $g = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$

$$\int g \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mu(A_n).$$

<u>Integrasjon av ikke-negative, målbare funksjoner.</u>

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu : g \text{ enkel}, \ 0 \le g \le f \right\}$$

<u>Teorem</u>: For enhver ikke-negativ, målbar f finnes det en voksende følge $\{g_n\}$ av enkle funksjoner som konvergerer punktvis mot f. For enhver slik følge er

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_n \, d\mu.$$

En ikke-negativ, målbar funksjon f er integrerbar dersom $\int f \, d\mu < \infty$

<u>Integrasjon av integrerbare funksjoner:</u>

Enhver funksjon kan skrives som en differanse mellom to positive funksjoner: $f = f_+ - f_-$ der

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } f(x) > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{hvis } f(x) < 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

---

f er integrerbar dersom <u>både</u> f_+ og f_- er integrerbare (ekvivalent: $|f|$ er integrerbar)

For integrerbare f definerer vi $\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$

Regneregler: (i) $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$
(ii) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$
(iii) $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Konvergensteoremer:
Monoton konvergensteorem: $f_n \uparrow f, \ f_n \geq 0 \Rightarrow \int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$
Dominert konvergensteorem: $f_n \to f, \ |f_n| \leq g$ integrerbar $\Rightarrow$
$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$
Fatous lemma: $f_n \geq 0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$

L^1- og L^2-rom

$L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ = (ekvivalensklasser av) alle integrerbare funksjoner med normen $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$

$L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ = (ekvivalensklasser av) alle funksjoner slik at $|f|^2$ er integrerbar med indreproduktet

$$\langle f, g \rangle_2 = \int f g \, d\mu.$$

L^1- og L^2 er komplette rom.

Produktmål

$\mu \times \nu$ er definert på $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ og er det entydig bestemte målet slik at $\mu \times \nu (A \times B) = \mu(A) \nu(B)$

Fubinis og Tonellis teoremer: μ, ν σ-endelige

(i) Tonelli: $f \geq 0$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-målbar

$$\int f \, d\mu \times \nu = \int \left[\int f(x,y) \, d\mu(x) \right] d\nu(y) = \int \left[\int f(x,y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x)$$

(ii) Fubini: f integrerbar, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-målbar

$$\int f \, d\mu \times \nu = \int \left[\int f(x,y) \, d\mu(x) \right] d\nu(y) = \int \left[\int f(x,y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x)$$

Konstruksjon av mål

$$\rho \longrightarrow \mu^* \longrightarrow \mu$$

ρ	μ^*	μ
definert på $\mathcal{R}$	ytre mål definert på $\mathcal{P}(X)$	mål, definert på μ-algebraen $\mathcal{M}$ av målbare mengder

E målbar: $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ for alle $A \subset X$

ρ er et premål dersom $\rho(\emptyset) = 0$ og $\rho\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$

hver gang $\{A_n\}$ er en disjunkt følge av mengder fra $\mathcal{R}$ slik at unionen $\bigcup A_n$ ligger i $\mathcal{R}$.

Carathéodorys utvidelsesteorem: Hvis $\mathcal{R}$ er en algebra eller en semialgebra og ρ er et premål på $\mathcal{R}$, så har ρ en utvidelse til et komplett mål

Lebesguemålet

På $\mathbb{R}$: Målet generert av $\rho((a,b]) = b - a$

På $\mathbb{R}^2$: $\mu \times \mu$

osv.

Regularitetsresultater

(i) Hvis A er målbar, finnes det for hver $A \in \mathcal{A}$ en lukket F og en åpen G slik at $F \subset A \subset G$ og $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$ og $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

(ii) Hvis $A \in \mathcal{A}$, så finnes det for hver $\varepsilon > 0$ en kontinuerlig funksjon f slik at

$$\mu\{x : f(x) \neq \mathbb{1}_A(x)\} < \varepsilon.$$

Fourier analyse

$\mu = \frac{1}{2\pi}$ Lebesguemål på $[-\pi, \pi]$

$e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, ortonormal basis for $L^2([-\pi, \pi])$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

der $\langle f, e_n \rangle = \int f(x) e^{-inx} \, d\mu(x)$