Oppgaver til avsnitt 11.3

1 Finn løsningen av problemet

$$\min \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)\, dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

Vis at det tilhørende maksimeringsproblemet ikke har noen løsning. (*Vink:* La $x(t) = a(t - t^2)$, beregn integralet og la $a \to \infty$.)

2 Vis at problemet $\min \int_a^1 t\dot{x}^2\, dt$, $x(a) = 0$, $x(1) = 1$ har løsning når $a \in (0, 1)$, ikke når $a = 0$.

3 Betrakt problemet $\min \int_0^T (\dot{x}^2 - x^2)\, dt$ når $x(0) = x(T) = 0$. Finn den eneste mulige løsningen av Euler-likningen for $T = 1$ og $T = 4$. For $T = 1$ kan en vise at denne løsningen er optimal. Imidlertid fins det ingen optimal løsning for $T = 4$. Vis det ved å la $\hat{x}(t) = bt$ i $[0, 2]$, $\hat{x}(t) = b(4 - t)$ i $(2, 4]$ og la $b \to \infty$.

Oppgaver til avsnitt 11.5

1 Løs problemet $\min \int_0^1 (t\dot{x} + \dot{x}^2)\, dt$, $x(0) = 1$, (i) med $x(1)$ fri, (ii) med $x(1) \geq 1$.

2 Betrakt variasjonsproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 \left(10 - \dot{x}^2 - 2x\dot{x} - 5x^2\right) e^{-t}\, dt, \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

(a) Løs problemet.

(b) Hva er den optimale løsningen hvis endebetingelsen er at $x(1)$ er fri?

(c) Hva er den optimale løsningen hvis endebetingelsen er at $x(1) \geq 2$?

3 Løs problemet $\int_0^{t_1} (\dot{x}^2 + 1)\, dt$, $x(0) = 0$, $x(t_1) = 1$, t_1 er fri.
(Gå ut fra at problemet har en optimal løsning.)

4 I en modell av J.K. Sengupta oppstår følgende problem:

$$\min \int_0^T (\alpha_1 \overline{Y}^2 + \alpha_2 G^2)\, dt, \qquad \dot{\overline{Y}} = r_1 \overline{Y} - r_2 G, \quad \overline{Y}(0) = Y_0, \quad \overline{Y}(T) \text{ fri}$$

der α_1, α_2, r_1, r_2, T og Y_0 er gitte positive konstanter.

(a) Formuler problemet som et variasjonsproblem med $\overline{Y} = \overline{Y}(t)$ som den ukjente funksjonen. Finn den tilordnede Euler-likningen.

(b) Løs problemet.

5 Løs problemet i eksempel 4 når $U(C) = a - e^{-bC}$ der a og b er positive konstanter.

6 Betrakt problemet (6) med kravet $x(t_1) = x_1$ erstattet med kravet $x(t_1) = g(t_1)$, der g er en gitt deriverbar funksjon. De tillatte funksjonene er C^2 med grafer som starter i (t_0, x_0) og ender et eller annet sted på grafen til g. En kan vise at transversalitetsbetingelsen blir (se Seierstad og Sydsæter (1987), s. 34–36)

$$\left[F(t, x, \dot{x}) + (\dot{g}(t) - \dot{x}(t)) \frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}\right]_{t=t_1} = 0 \tag{9}$$

(a) Vis at (7) kan utledes av (9).

(b) Finn den eneste mulige løsningen av problemet

$$\min \int_1^{t_1} \frac{\dot{x}^2}{t^2}\, dt, \qquad x(1) = 0, \quad x(t_1) = t_1^2, \quad t_1 \text{ fri}$$