LØSNING AV EKSAMEN I MAT 2310 VÅREN 2007

OPPGAVE 1

$$\operatorname*{maks}_{u_0, u_1, \ldots, u_T} [\sum_{t=0}^{T-1} \frac{2\sqrt{u_t}}{x_t} + 2x_T^{-1}],$$

der

$$x_{t+1} = (1-u_t)^{-1} x_t \quad (t = 0,\, 1,\, \ldots,\, T-1),$$
$$0 < u_t < 1 \quad (t = 0, 1, \ldots, T).$$

Her er x_0 et gitt positivt tall.
(a) Vi anvender Fundamentallikningene til å bestemme $J_T(x)$, $J_{T-1}(x)$ og tilhørende optimale kontrollfunksjoner $u_T^*(x)$, $u_{T-1}^*(x)$:

$$J_T(x) = \operatorname*{maks}_{0 \le u \le 1} 2x^{-1} = 2x^{-1}, \quad u = u_T^*(x) \text{ kan velges fritt i } (0,1).$$

Vi lar $u_T^*(x) = \frac{1}{2}$. Her brukte vi at $x_0 > 0$ og $u_t \in (0,1)$, $t \le T$, så $x = x_T > 0$ ved differenslikningen og rekursjon. Tilsvarende er

$$J_{T-1}(x) = \operatorname*{maks}_{u} [\frac{2\sqrt{u}}{x} + 2(1-u)x^{-1}] = 2x^{-1} \operatorname{maks}[\sqrt{u} + 1 - u].$$

La $h(u) = \sqrt{u} + 1 - u$ Da er $h'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} - 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{4}$. Da $h''(u) = -\frac{1}{4}u^{-3/2} < 0$, har h et maks. i $u = \frac{1}{4}$. Da er

$$J_{T-1}(x) = \frac{5}{2}x^{-1}\,(= k_1 x^{-1}), \quad u_{T-1}^*(x) = \frac{1}{4}\,(= \frac{1}{k_0^2}).$$

(b) Vi skal vise at

$$(*) \quad J_{T-t}(x) \;=\; \frac{1}{x}k_t\,, \quad u_{T-t}^*(x) = \frac{1}{k_{t-1}^2} \quad (t = 1,\, 2,\, \ldots, T),$$

der k_t oppfyller den ikke-lineære differenslikningen

$$k_{t+1} = \; k_t + \frac{1}{k_t} \quad (t = 0,\, 1,\, \ldots, T-1), \quad k_0 = 2 :$$

Formlene i $(*)$ er riktige for $t = 1$ ved (a). Anta de holder for en t $(t \ge 1)$. Ved Fundamentallikningene er da

$$J_{T-(t+1)}(x) = \operatorname*{maks}_{u} [\frac{2\sqrt{u}}{x} + J_{T-t}((1-u)^{-1}x)]$$

$$= \operatorname*{maks}_{u} [2u^{1/2}x^{-1} + (1-u)x^{-1}k_t] = x^{-1} \operatorname{maks}[2u^{\frac{1}{2}} + (1-u)k_t]$$

La $h(u) = 2\sqrt{u} + (1-u)k_t$ Da er $h'(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} - k_t = 0 \Leftrightarrow u = k_t^{-2}$. Siden $h''(u) = -\frac{1}{2}u^{-3/2} < 0$, har vi et maks. i $u = k_t^{-2}$. Da er

$$J_{T-(t+1)}(x) = x^{-1}[2k_t^{-1} + (1-k_t^{-2})k_t] = x^{-1}[2k_t^{-1} + k_t - k_t^{-1}]$$

$$= x^{-1}[k_t + k_t^{-1}] = x^{-1}k_{t+1},$$

$$u^*_{T-(t+1)}(x) = k_t^{-2},$$

så $(*)$ gjelder for $t+1$ også. Dermed følger det ved induksjon at formlene gjelder for $t = 1, 2, \dots, T$. Videre er for $x_0 = 1$, $T = 3$:

$$k_0 = 2, k_1 = 2{+}1/2 = 5/2, k_2 = 5/2{+}2/5 = 29/10, k_3 = 29/10{+}10/29 = 941/290,$$

og

$$J_0(x_0) = k_3/x_0 = 941/290.$$

OPPGAVE 2 Vi betrakter kontrollproblemet

$$\max_u \int_0^1 (\ln u + x)\,\mathrm{d}t, \quad \dot{x} = x - u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \text{ er fri},$$

og der $u(t) \in (0,1]$ for alle $t \in [0,1]$.

(a) Hamiltonfunksjonen for problemet er

$$H(t,x,u,p) = \ln u + x + p(x-u)$$

og ved Maksimumsprinsippet er

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1 + p = -\dot{p}, \quad \dot{p} + p = -1.$$

Dermed er $p(t) = Ae^{-t} - 1$, der $p(1) = 0$ da $x(1)$ er fri. Altså er $A = e$ og

$$p(t) = e^{1-t} - 1.$$

Vi merker oss for senere bruk at $\dot{p}(t) = -e^{1-t} < 0, p(1) = 0$, $p(0) = e - 1$, så $p(t) \in [0, e-1]$.

Vi antar nå at (x^*, u^*) er et optimalt par for problemet.

(b) Vi vil bestemme den éntydige løsningen t_0 av likningen $p(t) = 1$: Her er $p(t) = e^{1-t} - 1 = 1 \Leftrightarrow e^{1-t} = 2 \Leftrightarrow 1 - t = \ln 2 \Leftrightarrow t = 1 - \ln 2 \in [0,1)$. Dermed er $t_0 = 1 - \ln 2$.

Videre er $\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{u} - p = 0$, $u = p^{-1}$ hvis $p^{-1} \in (0,1]$, dvs. $p \in [1, \infty)$. Dessuten er $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -1/u^2 < 0$, så H har et maksimum for $u = p^{-1} \in (0,1]$. Som vi så tilslutt i punkt (a), er $\frac{1}{p(t)} \in [\frac{1}{e-1}, \infty)$, $t \in [0,1)$.
For $t \in [0, t_0)$, er $p(t)^{-1} \in [\frac{1}{e-1}, 1) \subset (0,1]$. Altså har H sitt maksimum for $u = u^*(t) = \frac{1}{p(t)}$.

(c) Vi finner $x^*(t)$ for $t \in [0,\, t_0)$:
$u = u^*(t) = \frac{1}{p(t)}$, så $x = x^*$ oppfyller

$$\dot{x} - x = -1/(e^{1-t} - 1), \quad e^{-t}x = -\int \frac{e^{-t}}{e^{1-t} - 1}\,\mathrm{d}t = e^{-1}\ln\left(e^{1-t} - 1\right) + K,$$

$$x(t) = e^{t-1}\ln(e-1) + Ke^t$$

der $x(0) = 0 = e^{-1}\ln(e-1) + K$, så $K = -\ln(e-1)/e$ og

$$x^*(t) = e^{t-1}\ln(e^{1-t} - 1) - \ln(e-1)e^{t-1}, \quad t \in [0, t_0).$$

(d) Vi skal vise at $\frac{\partial H}{\partial u} > 0$ i punkter $(t, x(t), u(t), p(t))$ der $t \in (t_0,\, 1]$:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1/u - p.$$

For $t \in (t_0, 1]$ er $p(t) \in [0, 1)$. Alltid er $\frac{\partial H}{\partial u} \geq 1 - p(t)$ da $u \in (0, 1]$. Her er $p(t) \in [0, 1)$, så $1 - p(t) > 0$, så $\frac{\partial H}{\partial u} > 0$. Dermed vil $u = u^*(t) = 1$ maksimere H på intervallet $(t_0, 1]$.

(e) Vi bestemmer så $x^*(t)$ på intervallet $(t_0,\, 1]$:
Siden $u = u^*(t) = 1$ på $(t_0, 1]$, må $\dot{x}^* - x^* = -1$, så $x^*(t) = Ae^t + 1$. I punktet $t_0 = 1 - \ln 2$ er x^* kontinuerlig (fra begge sider), så

$$Ae^{1-\ln 2} + 1 = e^{-\ln 2}\ln(e^{\ln 2} - 1) - \ln(e-1)e^{-\ln 2},$$

$$Ae/2 + 1 = \ln 1/2 - \ln(e-1)/2, \quad A = \frac{2}{e}[-1 - \ln(e-1)/2].$$

Dermed er

$$x^*(t) = -2[1 + \frac{1}{2}\ln(e-1)]e^{t-1} + 1, \quad t \in (t_0, 1].$$

Her er $\ln u + x$ konkav i (x, u) (den er en sum av de konkave funksjonene $(x, u) \mapsto \ln u$ og $(x, u) \mapsto x$) og $p(t)(x - u)$ er lineær og derfor konkav. Altså er H konkav i (x, u) for hver t. (Som alternativ kunne vi brukt 2."−derivert-testen her.) Ved Mangasarians setning løser da (x^*, u^*) maksimeringsproblemet.