OPPGAVER I MAT2310 VÅREN 2007

OPPGAVE 1 Følgende problem i dynamisk programmering skal studeres.

$$\max_{u_0, u_1, \ldots, u_T} [\sum_{t=0}^{T-1} \frac{2\sqrt{u_t}}{x_t} + 2x_T^{-1}],$$

der

$$x_{t+1} = (1-u_t)^{-1} x_t \quad (t = 0, 1, \ldots, T-1),$$

$$0 < u_t < 1 \quad (t = 0, 1, \ldots, T).$$

Her er x_0 et gitt positivt tall.
(a) Anvend Fundamentallikningene til å bestemme $J_T(x)$, $J_{T-1}(x)$ og tilhørende optimale kontroll-funksjoner $u_T^*(x)$, $u_{T-1}^*(x)$.
(b) Bevis at

$$J_{T-t}(x) = \frac{1}{x} k_t, \quad u_{T-t}^*(x) = \frac{1}{k_{t-1}^2} \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

der k_t oppfyller den ikke-lineære differenslikningen

$$k_{t+1} = k_t + \frac{1}{k_t} \quad (t = 0, 1, \ldots, T-1), \quad k_0 = 2.$$

Hva er løsningen på maksimeringsproblemet for $T = 3$ og $x_0 = 1$?

OPPGAVE 2 Vi betrakter kontrollproblemet

$$\max_u \int_0^1 (\ln u + x)\, \mathrm{d}t, \quad \dot{x} = x - u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \text{ er fri},$$

og der $u(t) \in (0, 1]$ for alle $t \in [0, 1]$.

(a) Skriv opp Hamiltonfunksjonen H for problemet, beregn $\frac{\partial H}{\partial x}$ og finn den adjungerte funksjonen p.

Vi antar nå at (x^*, u^*) er et optimalt par for problemet.

(b) Bestem den éntydige løsningen t_0 av likningen $p(t) = 1$. Forklar at

$$u^*(t) = \frac{1}{p(t)}, \quad \text{for } t \in [0, t_0).$$

(c) Finn $x^*(t)$ for $t \in [0, t_0)$.

(d) Vis at $\frac{\partial H}{\partial u} > 0$ i punkter $(t, x(t), u(t), p(t))$ der $t \in (t_0, 1]$. Hva er $u^*(x)$ for $t \in (t_0, 1]$?

(e) Bestem så $x^*(t)$ på intervallet $(t_0, 1]$. Forklar at (x^*, u^*) virkelig løser kontrollproblemet.