MAT2500 høsten 2009

Løsningsforslag til Obligatorisk oppgavesett 2

Oppgave 1

a): Siden OA er perpendikulær til tangenten ℓ i A, kan likningen til ℓ skrives som $\overline{A}Z+A\overline{Z}=d$. Innsetting av $Z=A$ gir at $d=2A\overline{A}=2|A|^2=2(1+3)=8$. Tilsvarende får vi at en likning for $\overline{\ell}$ er $AZ+\overline{A}\,\overline{Z}=8$.

Skjæringspunktet B mellom linjene ℓ og $\overline{\ell}$ er gitt ved $(A+\overline{A})(B+\overline{B})=2(B+\overline{B})=16$ og $(\overline{A}-A)(B-\overline{B})=-2i\sqrt{3}(B-\overline{B})=0$. Dette gir $B=4$.

b): Radien i sirkelen k' er $|AB|=|3-i\sqrt{3}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Likningen for sirkelen er da

$$Z\overline{Z}-B\overline{Z}-\overline{B}Z+B\overline{B}-(2\sqrt{3})^2=0,$$

som gir

$$Z\overline{Z}-4(\overline{Z}+Z)+4=0.$$

Siden radiene OA og BA er perpendikulære, er også tangentene til k og k' i A perpendikulære.

c): Vi har $S(B)=S(4)=\frac{4}{4}=1$. Vi vet at $S(A)=A$ og $S(\overline{A})=\overline{A}$. For å bestemme bildet av k' under S er det derfor nok å finne bildet av et tredje punkt å k'. Ta det ene skjæringspunktet $C=B-2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$ mellom k' og x-aksen. Da er $S(C)=\frac{4}{4-2\sqrt{3}}=4+2\sqrt{3}$ som er det andre skjæringspunktet mellom k' og x-aksen. Siden bildet av en sirkel under en inversjon er bestemt av bildene av tre punkter på sirkelen, følger det at k' avbildes på seg selv under S.

Hvis Z er reell, er $\overline{Z}=Z$ reell, så S tar x-aksen (bortsett fra O) til x-aksen. Merk at $S(O)=\infty$ og $S(\infty)=O$.

d): Vi får

$$(A\overline{A},BO)=\frac{(A-B)(\overline{A}-O)}{(A-O)(\overline{A}-B)}=\frac{(A-4)\overline{A}}{A(\overline{A}-4)}=-1.$$

Tilsvarende finner vi $(AB,\overline{A}O)=2$ og $(AB,O\overline{A})=\frac{1}{2}$. Punktene A, $\overline{A}$, B, O er altså harmoniske.

Oppgave 2

a): F er et fikspunkt dersom

$$T(F)=\frac{AF+B}{CF+D}=F.$$

Anta først at $C = 0$. Da er $T(\infty) = \infty$, så ∞ er et fikspunkt. Et annet fikspunkt er når $F = \frac{A}{D}F + \frac{B}{D}$. Hvis $A \neq D$, er

$$F = \frac{B}{D - A}$$

et fikspunkt. Hvis $A = D$ og $B \neq 0$, er det ikke flere fikspunkter enn ∞; hvis $A = D$ og $B = 0$, er T identitetsavbildningen, mot antakelsen.

Anta så $C \neq 0$. Da er fikspunktene gitt ved

$$F = \frac{1}{2C}\left(A - D \pm \sqrt{(D - A)^2 - 4BC}\right).$$

Altså har T ett fikspunkt hvis $(D - A)^2 - 4BC = 0$, og to fikspunkter hvis $(D - A)^2 - 4BC \neq 0$. (Merk at ingen av disse fikspunktene er ∞.)

b): $STS^{-1}(0) = ST(F_1) = S(F_1) = 0$ og $STS^{-1}(\infty) = ST(F_2) = S(F_2) = \infty$.

Enhver Möbius-transformasjon U med fikspunkter 0 og ∞ er på formen $U(Z) = AZ$, for en $A \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$.

c): La F være fikspunktet til T. Anta $F \neq \infty$, og la S være $S(Z) = \frac{Z}{Z-F}$. Da er $S(F) = \infty$ og $STS^{-1}(\infty) = ST(F) = S(F) = \infty$. Siden T bare har ett fikspunkt, gjelder det samme for STS^{-1}. Av drøftingene i punkt a) følger det at STS^{-1} er på formen $STS^{-1}(Z) = Z + B$, der $B \neq 0$. Anta så at $F = \infty$. Da holder det å ta S lik identitetsavbildningen.

Oppgave 3

a):

$$\mathrm{vol}(OABC) = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}.$$

La $A' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)$, $B' = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1)$ og $C' = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1)$ være skjæringspubnktene mellom henholdsvis OA, OB, OC og planet $z = 1$. Da er

$$\mathrm{vol}(OA'B'C') = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}.$$

Det ønskede volumet blir da $\frac{5}{2} - \frac{1}{24} = \frac{59}{24}$.

b): Planet utspent av OA og OB har normalvektor $A \times B = (-5, -5, 5)$, så også $N = (-1, -1, 1)$ er en normalvektor. Vi får

$$T(C) = C - 2\frac{N \cdot C}{|N|^2}N = (1, 1, 5) - 2\frac{3}{3}(-1, -1, 1) = (3, 3, 3).$$