UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT2500 — Geometri

Eksamensdag: Torsdag 17. desember 2015

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1

La E^2 være det Euklidske planet med koordinater x, y. La ℓ være linja med ligning $x = 1$ og ℓ' linja med ligning $y = -x$. La s_ℓ og $s_{\ell'}$ være speilingene av planet om disse linjene.

a. Vis at sammensetningen $\rho = s_\ell s_{\ell'}$ er en rotasjon, bestem sentrum for rotasjonen og rotasjonsvinkelen. (2pt)

b. La $t_{\mathbf{a}} : E^2 \to E^2$ være translasjonen med vektoren $\mathbf{a} = (0, 2)$. Finn et fikspunkt for den sammensatte isometrien $t_{\mathbf{a}}\rho : E^2 \to E^2$. (1pt)

c. Finn et kvadrat $K \subset E^2$ som avbildes på seg selv ved denne isometrien. Begrunn svaret. (1pt)

OPPGAVE 2

a. La C_1 og C_2 være to sirkler med radier r_1 og r_2 og sentre i S_1 og S_2. Summen av radiene er mindre enn avstanden mellom sentrene, det vil si $r_1 + r_2 < S_1S_2$. De to sirklene har felles tangenter som skjærer hverandre i et punkt T på linjestykket mellom S_1 og S_2. Tegn figur og vis at

$$S_1T/S_2T = r_1/r_2 \qquad (2pt)$$

b. I en trekant $\triangle ABC$, la C_A, C_B, C_C være sirkler med sentrum i henholdsvis A, B og C, og radius r_A, r_B, r_C,. Anta at $r_A < r_B < r_C$ og at $r_A + r_B < AB, r_A + r_C < AC$ og $r_B + r_C < BC$. De to sirklene C_A og C_B har to felles tangenter som skjærer hverandre på linjestykket mellom A og B. Kall dette punktet F. Tilsvarende vil to felles tangenter til C_A og C_C skjære hverandre i et punkt E på linjestykket mellom A og C, og to felles tangenter til C_B og C_C skjære hverandre i et punkt D på linjestykket mellom B og C. Tegn figur og bruk resultatet i (a) til å vise at AD, BE og CF har et felles punkt. (2 pt)

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 3

Til en parabel med ligning $y^2 = 8x$ er det trukket en korde gjennom punktet (2,0) med stigningstall k. Korden er diameter i en sirkel.

a. Tegn figur med parabel, korde og sirkel, når $k = 1$. (1pt)

b. Finn ligningen til sirkelen for vilkårlig $k \neq 0$. (1 pt)

c. Vis at linja $x = -2$ tangerer denne sirkelen. (1 pt)

d. Finn ligningen til det geometriske stedet for midtpunktet til korden når k varierer. (2 pt)

e. Hvilke grensepunkter på det geometriske stedet går midtpunktet av korden mot når $k \to 0$ og når $k \to \infty$? (1pt)

OPPGAVE 4

La $(x_0 : x_1 : x_2)$ være homogene koordinater i det projektive planet.

a. Finn skjæringspunktet P mellom linjene med ligninger $x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$ og $x_0 + 3x_1 - x_2 = 0$. La $Q = (1 : 2 : 3)$ og finn ligningen til linja gjennom P og Q. (2pt)

b. La C være kjeglesnittet med ligning $x_0^2 + 2x_0x_1 + 3x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$. Bestem antall punkter C har på linja med likning $x_1 - x_2 = 0$. (1pt)

c. Hva slags kjeglesnitt er C i det affine planet der $x_1 \neq x_2$? (1pt)

SLUTT