Obligatorisk oppgave MAT 2700

Høstsemester 2005

Innleveringsfrist: 4.11.2005 kl 14h00, matematisk resepsjon på 7. etasje Niels Henrik Abels hus.

For å bestå må alt være gjort. Det trenges ikke kalkulator

La $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ være et sannsynlighetsrom med $K = 3$ utfall og P en sannsynlighet på Ω s.a. $P(\omega_i) > 0$ for alle $i = 1, 2, 3$. Vi skal se på foelgende 3 modeller for enperiodefinansmarkeder på Ω :

M1 :

- en bankbok med startverdi $B_0 = 1$ og rentesats $r = 0$
- $N = 1$ aksjer:

ω	$S(0,\omega)$	$S(1,\omega)$
ω_1	4	5
ω_2	4	4
ω_3	4	3

M2 :

- en bankbok med startverdi $B_0 = 1$ og rentesats $r = 0$
- $N = 2$:aksjer:

ω	$S_1(0,\omega)$	$S_1(1,\omega)$	$S_2(0,\omega)$	$S_2(1,\omega)$
ω_1	4	5	5	2
ω_2	4	4	5	3
ω_3	4	3	5	6

M3 :

- en bankbok med startverdi $B_0 = 1$ og rentesats $r = \frac{1}{10}$
- $N = 2$ aksjer:

ω	$S_1(0,\omega)$	$S_1(1,\omega)$	$S_2(0,\omega)$	$S_2(1,\omega)$
ω_1	4	$\frac{11}{2}$	5	$\frac{77}{10}$
ω_2	4	$\frac{22}{5}$	5	$\frac{33}{10}$
ω_3	4	$\frac{33}{10}$	5	$\frac{11}{2}$

Oppgave 1 (risikonøytrale sannsynligheter):

a.) Angi S_1^*, S_2^*, V, V^*, G og G^* i marked M3. Hva kan du si om de neddikonterte stoerrelsene i markedene M1 og M2?

b.) Hva er definisjonen på en risikonøytral sannsynlighet?

c.) Beregn alle risikonøytrale sannsynligheter i markedene M1, M2 og M3.

Oppgave 2 (arbitrasje):

a.) Hva er definisjonen på en arbitrasjemulighet? Skriv også opp de ekvivalente karakteriseringene ved hjelp av V^* h.h.v. G^*.

b.) Forklar fra et økonomisk standpunkt hvorfor vi bare ønsker markedsmodeller uten arbitrasjemuligheter.

c.) Karakteriser forholdet mellom arbitrasje og risikonøytrale sannsynligheter. Angi om det finnes arbitrasjemuligheter i markedene M1, M2 og M3 og begrunn svaret ditt. For de markedene hvor det finnes arbitrasje angi en konkret arbitrasjemulighet (her er det enklest å bruke karakteriseringen av arbitrasje ved hjelp av G^*).

Hvis du har regnet riktig har du funnet ut at markedet M2 inneholder arbitrasjemuligheter. M2 er altså en dårlig model og vi skal i det følgende bare se på markedene M1 og M3.

Oppgave 3 (prising av betingete krav og komplette markeder):

a.) Hva er definisjonen på et betinget krav og hva representerer et betinget krav?

b.) Hva vil det si at et betinget krav er oppnåelig og hvordan karakteriseres oppnåelighet v.h.a. risikonøytrale sannsynligheter?

c.) Hva er den arbitrasjefrie prisen til et oppnåelig krav og hvordan kan den utrykkes v.h.a. risikonøytrale sannsynligheter?

d.) La X vaere et generelt betinget krav. Set

$$V_+(X) := \inf \{E_Q[Y/B_1] : Y \geq X,\ Y \text{ er oppnåelig}\}$$

$$V_-(X) := \sup \{E_Q[Y/B_1] : Y \leq X,\ Y \text{ er oppnåelig}\}.$$

Beskriv investeringstrategien for å oppnå en arbitrasje hvis prisen p til X er ekte større enn $V_+(X)$ h.h.v. ekte mindre enn $V_-(X)$. En arbitrasjefri pris p for X må altså vaere slik at $p \in [V_-(X), V_+(X)]$.

e.) Hva er definisjonen på et komplett marked? Karakteriser forholdet mellom kompletthet og risikonøytrale sannsynligheter.

f.) Bestem alle oppnåelige betingede krav i M1 h.h.v. M3?

g.) La oss se på kjøpsopsjonen

$$X(\omega) = (S_1(1, \omega) - k)^+ , \quad k > 0,$$

hvor $(S_1(1, \omega) - k)^+ := \max\{S_1(1, \omega) - k, 0\}$. Beskriv med ord hva slags kontrakt du får når du kjøper $X(\omega)$. For $k = 4$, sjekk om $X(\omega)$ er oppnåelig i M1, og finn $[V_-(X), V_+(X)]$. For $k = 3$, finn en replikerende portefølje for $X(\omega)$ og angi prisen til $X(\omega)$ i marked M3.

Oppgave 4 (nyttemaksimering):

I marked M3 la oss se på foelgende optimal portefoelje problem :

$$\begin{array}{ll} \underset{H}{maksimer} & E[u(V_1)] \\ med & V_0 = v, \end{array}$$

der V_0 er startverdien og V_1 er sluttverdien av porteføljen som tilsvarer strategien H, og nyttefunksjonen u er gitt ved

$$u(x) = \gamma^{-1} x^{\gamma}, \quad -\infty < \gamma < 1, \, \gamma \neq 0.$$

a.) Skriv opp hvilken form verdien til den optimale porteføljen tar ved å gjennomgå det første skrittet i den risikonøytrale metoden for portefoeljeoptimering (som benytter Lagrange multiplier).

b.) Anta nå at sannsynligheten P in M3 er gitt ved $P(\omega_1) = 1/6$, $P(\omega_2) = 1/6$, $P(\omega_3) = 2/3$, og sett $\gamma = 1/2$. Beregn verdien til den optimale porteføljen og finn den tilhørende optimale handlestrategien.

Oppgave 5 (filtrasjoner og martingaler):

a.) La $S(t, \omega), t = 0, ..., T$ vaere en stokastisk prosess. Beskriv hvordan man oppnår 'filtrasjonen generert av $S(t, \omega)$'. Hva representerer denne filtrasjonen når $S(t, \omega)$ er en stokastisk prosess som modelerer usikre verdipapirer i en flerperiode markedsmodel. Hva krever vi av handlestrategiene for å vaere konsistent med informasjonsmodeleringen?

b.) For en gitt filtrasjon $\mathcal{F}_t$, $t = 0, ..., T$ gi definisjonen på en martingal. Vis at for en gitt stokastisk variabel X er den stokastike prosessen definert ved

$$Y(t, \omega) := E[X \,|\mathcal{F}_t], \quad t = 0, ..., T,$$

er en martingal.