Obligatorisk oppgave 1, MEK3230.

Frist for innlevering av oppgaven er 15/3-2012. Legg ved kildekodene som er brukt til å løse oppgavene under og svar på spørsmålene.

1 Bølgelikning i to dimensjoner

Mange enkle ikke-dispersive bølgebevegelser tilfredsstiller bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \tag{1}$$

hvilket er en lineær partiell differensial likning. Den ukjente $u(x, y, t)$ er en bølge eller forstyrrelse som tranporteres i mediet, som for eksempel kan være en væske, gass eller en membran. Forplantningshastigheten er gitt ved c, som antas å være konstant. I denne oppgaven ser vi på 1 i beregningsdomenet $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$ med initial- og grensebetingelser gitt ved:

$$u(x, y, 0) = \exp\left(-40\left[(x-0.4)^2 + y^2\right]\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

$$u(\pm 1, y, t) = u(x, \pm 1, t) = 0. \tag{4}$$

Merk at grensebetingelsene her er satt til homogen Dirichlet for å forenkle implementasjonen. En mer fysikalsk riktig grensebetingelse vil være å sette $\nabla u \cdot n = 0$, der n er normalen til grenseflaten.

Diskretiser rommet med et strukturert nett med N noder i hver retning og der $h = \triangle x = \triangle y = 2/(N-1)$. Implementer likning 1 med andre ordens sentrale endelige differanser i både tid og rom:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j}^{k-1}}{\triangle t^2} = c^2 \left(\frac{u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k} + u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} - 4u_{i,j}^{k}}{h^2}\right), \tag{5}$$

der k er tidsskritt, tiden er gitt ved $t = k\triangle t$ og i, j representerer en node i det strukturerte nettet. Integrer likningen over tidsrommet $0 \leq t \leq 2$. Prøv med forskjellige verdier på N og Couranttallet $C = c\triangle t/h$.

(i) Plot løsningen ved $t = 0.5, 1, 1.5$ og 2 (Hint: bruk surf eller surfc fra scitools).

(ii) Hvor lite må Couranttallet være for at løsningen skal holde seg stabil?

(iii) Hva menes med et eksplisitt numerisk skjema? (Hint: 5 er et eksplisitt numerisk skjema for den ukjente $u_{i,j}^{n+1}$.)

(iv) Det anbefales ofte at Couranttallet bør være mindre enn 1 for at man skal få en stabil løsning av et eksplisitt numerisk skjema. Hva innebærer denne restriksjonen i praksis? Hva betegner en CFL betingelse til et numerisk skjema?

2 Tyngdebølger

I denne oppgaven skal vi implementere likingene for tyngdebølger, som er løst analytisk i kap 7, Kundu et.al. [1]. De gjeldende likningene er:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi(x,y) &= 0,\ -\pi \le x \le \pi,\ -H \le y \le 0, && (6)\\
\eta(x,t) &= a\cos(kx-\omega t), && (7)\\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad y=0, && (8)\\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= 0, \quad y=-H, && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}
$$

der ϕ er hastighetspotensialet og η er overflatehevningen. Løsningsdomenet er periodisk i x-retningen og vi setter amplituden a til 0.01, $\omega = \pi$, $H = 2$ og bølgelengden $\lambda = \pi$. Løs problemet på et strukturert nett. Det er valgfritt hvilken metode man velger for å implementere likningen. På grunn av Neuman grensebetingelsene anbefales det imidlertid å implementere denne likningen ved å benytte endelige volum eller endelige elementer.

(i) Integrer likning 6 over et kontroll volum som har en flate i planet $y = 0$. Bruk Gauss' teorem til å forandre volumintegralet til et flateintegral. Vis hvordan grensebetingelsene kan implementeres naturlig med denne metoden (Hint: sett opp en diskretisert likning for et kontrollvolum som ligger inntil flaten).

(ii) Finn den numeriske feilen ved $t = 0$ ved å bruke den eksakte analytiske løsningen. Estimer feilen som $\sqrt{\sum_{i,j}(\phi(i,j) - \phi_{eksakt}(i,j))^2/N}$ (N er antall noder i nettet), og plot feilen som en funksjon av N. Kommenter resultatet. (Hint: Normaliser løsningen så middelverdien er 0.)

(iii) Plot hastighetsvektoren $u = \nabla\phi$ (Hint: quiver). Forklar hvordan u er beregnet.

(iv) Likning (6) løses vanligvis implisitt siden det kun er grensebetingelsen som er tidsavhengig. Hva kjennetegner et implisitt numerisk skjema?

(v) Når likning (6) løses med numeriske metoder er det ikke nødvendig å linearisere grensebetingelsen ved $y = \eta$. Innfør flatenormalen n og vis ved utledning at grensebetingelsen ved overflaten kan formuleres som $\nabla\phi \cdot n = (1/\sqrt{1 + (\partial\eta/\partial x)^2})\partial\eta/\partial t$, hvilket gjelder for et beregningsnett der den øvre flaten er gitt ved $y = \eta$.

(vi) En partikkel i fluidet har initiell posisjon $x_p = (-\pi/2, -H/2)$. Partikkelens posisjon som funksjon av tiden kan finnes ved numerisk integrasjon, for eksempel med en eksplisitt Euler metode:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_p}{dt} &= u(x_p,t) && (11)\\
x_p(t+\triangle t) &= x_p(t) + u(x_p,t)\triangle t && (12)
\end{aligned}
$$

Integrer partikkelens bane over en hel periode. Sammenlign partikkelbanen med likning (7.36) i Kundu et.al. [1]. (Hint: Start med å sette inn analytisk løsning for u i (12))

References

[1] P. K. Kundu, I. M. Cohen and D. R. Dowling *Fluid Mechanics*, 5th ed., Elsevier (2012)