LØSNINGER UKE 6, STK1100

SAMMENDRAG. Rettet løsning av oppgave 65.

VERSJON SKREVET AV TORE FJETLAND ØGAARD

Siden A og B er uavhengige, så er

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

a) Bevis at A er uavhengig av B^{C}. Påstanden vi skal bevise er altså

$$P(A \cap B^{\mathsf{C}}) = P(A)P(B^{\mathsf{C}})$$

A kan uttrykkes som en union av to disjunkte mengder:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{C}})$$

Dermed har vi fra aksiom 3:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^{\mathsf{C}}) \\ &\Longleftrightarrow \\ P(A \cap B^{\mathsf{C}}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^{\mathsf{C}}) && \text{(Property A)} \\ & QED \end{aligned}$$

b) Bevis at A^{C} er uavhengig av B^{C}. Påstanden vi skal bevise er altså

$$P(A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}) = P(A^{\mathsf{C}})P(B^{\mathsf{C}})$$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\
&= P(A)(1 - P(B^{\mathsf{C}})) && \text{(Property A)} \\
&= P(A) - P(A)P(B^{\mathsf{C}}) && \text{(Property A)} \\
&= P(A) + P(B^{\mathsf{C}})(P(A^{\mathsf{C}}) - 1) && \text{(Property A)} \\
&= P(A) + P(A^{\mathsf{C}})P(B^{\mathsf{C}}) - P(B^{\mathsf{C}}) && \text{(Property A)} \\
&= P(A) + P(A^{\mathsf{C}})P(B^{\mathsf{C}}) + P(B) - 1 && \text{(Property A)} \\
&\Longleftrightarrow \\
P(A^{\mathsf{C}})P(B^{\mathsf{C}}) &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\
&= 1 - P(A \cup B) && \text{(Property D)} \\
&= P((A \cup B)^{\mathsf{C}}) && \text{(Property A)} \\
&= P(A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}) && \text{(De Morgan)} \\
& QED
\end{aligned}
$$

Rettet opp versjon av "slik jeg tenkte det"

a). Vi vil vise $P(A \cap B^{\mathsf{C}}) = P(A)P(B^{\mathsf{C}})$, utifra at vi vet $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. For å få brukt det vi kjenner, kan vi utrykke $A \cap B^{\mathsf{C}}$ ved hjelp av $A \cap B$. Husk at $A \setminus B$ er definert som $A \cap B^{\mathsf{C}}$, og tolkes som de elementene som er med i A, men ikke i B. Ved å tegne et Venndiagram, er det klart at $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Viser dette under. Hvis man så legger merke til at $A \cap B \subseteq A$, kan vi bruke observasjonen øverst på side 5 i Rice, som sier at vi da har

$$
\begin{aligned}
P\left(A \setminus (A \cap B)\right) &= P(A) - P(A \cap B) \\
&= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B) = P(A)P(B^{\mathsf{C}}),
\end{aligned}
$$

som ønsket.

For å vise at $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, kan man se at

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^{\mathsf{C}} = A \cap (A \cap B)^{\mathsf{C}} = A \cap (A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}})$$

fra de Morgan, som deretter er lik

$$(A \cap A^{\mathsf{C}}) \cup (A \cap B^{\mathsf{C}}) = A \cap B^{\mathsf{C}}$$

fra den distributive reglen til snitt.

b). de Morgan gir $P(A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}) = P([A \cup B]^{\mathsf{C}})$, som deretter er

$$
\begin{aligned}
1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)
\end{aligned}
$$

fra uavhengighetsantagelsen. Dette er videre lik

$$
\begin{aligned}
P(A^{\mathsf{C}}) - P(B)[1 - P(A)] = P(A^{\mathsf{C}}) - P(B)P(A^{\mathsf{C}}) &= P(A^{\mathsf{C}})[1 - P(B)] \\
&= P(A^{\mathsf{C}})P(B^{\mathsf{C}}).
\end{aligned}
$$