UNIVERSITETET I OSLO

Det Matematisk-Naturvitenskapelige Fakultet

EKSAMEN I:	*ST 101 – Innføring i statistikk og sannsynlighetsregning*
TID FOR EKSAMEN:	*Onsdag 15. mai 1991 kl.* 9^{00}–15^{00}
HJELPEMIDLER:	*Formelsamling for ST 101,*
	Karl Rottmann's 'Mathematische Formelsammlung',
	lommekalkulator

OPPGAVESETTET INNEHOLDER TRE OPPGAVER, OG ER PÅ TO SIDER

Oppgave 1

De matematiske aksiomene for regning med sannsynligheter $P(A)$ for begivenheter A inneholdt i et utfallsrom S er som følger, dersom utfallsrommet er endelig:

1 For hver begivenhet $A \subset S$ gjelder $P(A) \geq 0$.
2 For begivenheten S gjelder $P(S) = 1$.
3 Dersom A og B er to disjunkte begivenheter gjelder $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Bruk disse aksiomene til å løse punktene (a), (b), (c) under. Ved løsning av punktene (d) og (e) kan du (også) bruke andre begreper og setninger fra pensum.

(a) For vilkårlige begivenheter A og B, vis at $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(b) For vilkårlige begivenheter $A_1, \ldots, A_{10}$, vis at $P(A_1 \cup \cdots \cup A_{10}) \leq P(A_1) + \cdots + P(A_{10})$.

(c) For vilkårlige begivenheter A, B, C, vis at

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(d) Anta at A, B, C er stokastisk uavhengige begivenheter, og at hver av dem har sannsynlighet på minst 0.90. Vis at sannsynligheten for $A \cup B \cup C$ er minst lik 0.999.

(e) Hvis menn utgjør 47% av befolkningen og snakker sant 78% av tiden, mens kvinner snakker sant 63% av tiden, hva er da sannsynligheten for at en vilkårlig valgt person skal besvare et spørsmål sannferdig? Hvis du får vite at denne vilkårlig valgte personen snakket sant, hva er da sannsynligheten for at vedkommende er en kvinne?

Oppgave 2

Levetiden X til en bestemt type teknisk maskin-komponent, målt i kontinuerlig tid der enheten er år, er en stokastisk variabel som følger fordelingen

$$F_\theta(x) = \Pr\{X \leq x\} = 1 - e^{-(x/\theta)^2}, \quad x \geq 0.$$

Her er θ en ukjent positiv parameter.

(a) Forklar hvorfor $F_\theta(x)$ definert over virkelig er en kumulativ fordelingsfunksjon, og finn dens tetthetsfunksjon $f_\theta(x)$.

(b) Finn medianen i fordelingen til X, og finn et uttrykk for sannsynligheten for at komponentens levetid skal være mellom 1.00 år og 3.00 år.

(c) Vis dessuten at

$$EX = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\theta, \qquad EX^2 = \theta^2.$$

Her kan du benytte at $\int_0^\infty y^{1/2}\,e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (som er et kjent resultat om gamma-funksjonen).

(d) Anta at n slike levetider har blitt observert, uavhengig av hverandre, med resultat $X_1, \ldots, X_n$. Finn en forventningsrett estimator for parameteren θ basert på gjennomsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Finn også denne estimatorens varians, og kommenter svaret.

(e) Vis at maximum-likelihood-estimatoren for θ er

$$\widetilde{\theta} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right\}^{1/2}.$$

Gi en begrunnelse for at denne estimatoren er rimelig i denne sammenheng.

(f) Konstruer et konfidensintervall for parameteren θ, med den egenskap at konfidensgraden er tilnærmet 95% for store n.

(g) Et konkret datamateriale for 10 levetider er som følger:

```
0.618 0.415 1.350 3.332 0.367
1.845 1.756 2.092 1.396 2.502
```

Beregn et estimat for q, sannsynligheten for at tre nye komponenter (av samme type som de 10) alle skal ha levetider på minst 2.00 år.

Oppgave 3

I det følgende diskuteres en forenklet modell som kan brukes til estimering av en dyrebestands størrelse, basert på en mangelfull telling. La X være antall dyr av en bestemt art i et bestemt område, og anta at en zoolog etter en forsiktig befaring klarer å observere Y av disse. Zoologens oppgave består i å estimere X ut fra Y. Dette kan gjøres hvis man har en sannsynlighets-modell for X og for Y gitt X.

(a) Anta at X er Poisson-fordelt med en passende parameter λ, altså at $\Pr\{X = x\} = e^{-\lambda}\,\lambda^x/x!$ for $x = 0, 1, 2, \ldots$. Hva er forventning og varians for X? Hvilken tolkning kan du gi λ?

(b) Anta at det faktisk er $X = x$ dyr i området. Anta at hvert av disse x dyrene lar seg oppdage av zoologen med samme sannsynlighet $p = 0.20$. Forklar at Y gitt $X = x$ blir binomisk fordelt, med parametre x og $p = 0.20$, under en viss tilleggs-antagelse. Hva er $E\{Y|X = x\}$?

(c) Vis at den ubetingede fordelingen for Y er Poisson med parameter $p\lambda = 0.20\,\lambda$.

(d) Finn så fordelingen til X gitt at $Y = y$. [Svaret er at X for gitt $Y = y$ kan skrives som y pluss en ny Poisson-fordelt størrelse.]

(e) Anta at zoologen anvender verdien $\lambda = 100$ for det aktuelle området, pr. tidligere erfaring, og at hun observerer $y = 27$ dyr. Gi et estimat for dyrebestandens størrelse. Begrunn ditt svar.

SLUTT