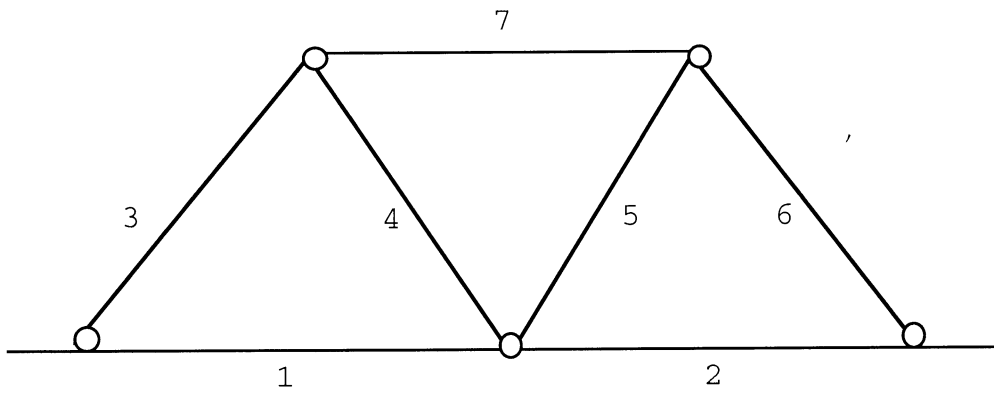


BENT NATVIG

PÅLITELIGHETSANALYSE MED
TEKNOLOGISKE ANVENDELSER



Matematisk institutt, Universitetet i Oslo
3. utgave
Januar 1998

Forord

Den direkte foranledningen til utgivelsen av dette kompendiet er at et nytt grunnemne i matematisk statistikk, innføring i pålitelighetsanalyse, ble opprettet ved Universitetet i Oslo høsten 1981. Hensikten med emnet er først og fremst å gi det sannsynlighetsteoretiske grunnlag for å beregne påliteligheten til et system, dvs. sannsynligheten for at systemet fungerer, når pålitelighetene til enkeltkomponentene systemet består av er kjent. Som motiverende eksempler på interessante systemer kan nevnes kjernekraftverk og oljerigger. Det skulle her være tilstrekkelig å minne om ulykkene i kjernekraftverkene på Three Mile Island i 1979 og i Tsjernobyl i 1986, nestenulykken i Barsebäckverket i 1992, og katastrofene i Nordsjøen med oljeriggene Alexander Kielland i 1980 og Piper Alpha i 1988, for å forstå viktigheten av at det både gis undervisning i pålitelighetsanalyse og at det drives forskning på dette området.

Opprettelsen av dette emnet er en del av utbyggingen av teknologisk orienterte studieveier ved Universitetet i Oslo, og ble gjort mulig ved at Stortinget våren 1981 ekstraordinært bevilget en amanuensisstilling. Betydningen av fagområdet ble understreket ved at Stortinget fulgte opp med å bevilge et professorat fra 1. juli 1985. Emnet er en innledning til avanserte studier, men er også passende som støttkurs i andre fagkretser og som videre- og etterutdanning for realister og ingeniører.

I Stortingsmelding nr. 89 1979-80, om høyere teknisk utdanning i Norge, sies det innledningsvis: "Det er av stor betydning å forstå ikke bare tekniske innretninger, systemer og prosesser alene, men også deres virkninger på natur, mennesker og samfunn. Høgre teknisk utdanning vil derfor få sin innretning bestemt av behovet for slik innsikt." Disse tanker er realisert i det nye emnet ved at en viktig del av dette er å se pålitelighetsanalyse i et samfunnsmessig perspektiv. Pensum her er første halvdel "Risikoanalyse og samfunn" av boken Natvig (1987).

Mye av stoffet i dette kompendiet baserer seg på de to første kapitlene i "klassikeren" på området Barlow og Proschan (1975a). Vi vil i tillegg forsøke å krydre det mer klassiske stoffet med noen nyere synspunkter og forskningsresultater. Lærebøker av norske forfattere på dette området er Aven (1994) og Høyland og Rausand (1994).

Et kapittel i dette kompendiet behandler Bayesianske statistiske metoder i pålitelighetsanalyse. Hensikten med slike metoder er å utnytte subjektive erfaringer, f.eks. hos ingeniørene, på en formell måte. Utarbeidelsen av dette materialet var også en del av prosjektet "Feildatainformasjon ved Bayesiansk statistikk" under et fellesnordisk forskningsprogram TEROTEKNOLOGI. Dette programmet hadde til hensikt å oppnå bedre pålitelighet og reduserte vedlikeholdskostnader for industrielt utstyr. Jeg er svært takknemlig for den økonomiske støtte Nordisk Industrifond og NTNF ga til dette prosjektet.

Emnet, innføring i pålitelighetsanalyse, som nå har betegnelsen ST 105, er gitt ved Universitetet i Oslo hvert år siden 1981 med undertegnede som foreleser og med førsteamanuensis Arne Bang Huseby som en svært dyktig medhjelper i de fleste av disse årene. Deler av stoffet i dette kompendiet er utarbeidet av ham hvilket jeg selvsagt er svært takknemlig for. I tillegg vil jeg takke vitenskapelig assistent Thore Egeland for å ha lest nøye gjennom manuskriptet og kommet med verdifulle kommentarer. Endelig går en stor takk til Tove Lieberg for glimrende arbeid med tekstbehandlingen av kompendiet.

August 1989

Bent Natvig

I denne nye utgaven er det kommet til et avsnitt om S-form teoremet som i all hovedsak er skrevet av Thore Egeland, basert på egen forskning. Videre er det gjort noen få rettelser.

August 1990

Bent Natvig

I denne nye utgaven er det gjort noen oppdateringer og en del rettelser. En takk til Dina Haraldsson for utmerket arbeid med tekstbehandlingen av denne utgaven.

Januar 1998

Bent Natvig

Innhold

1	Pålitelighetsanalyse i atomalderen	1
1.1	Kom Tsjernobyl-ulykken totalt uventet?	1
1.2	Pålitelighetsanalyse anvendt på store teknologiske systemer	2
2	Deterministisk systemanalyse	5
2.1	Systemer av komponenter	5
2.2	Koherente og monotone systemer	8
2.3	Representasjon av monotone systemer ved stier og kutt	12
2.4	Strukturell betydning av de enkelte komponenter	15
2.5	Moduler av monotone systemer	17
3	Stokastisk systemanalyse	19
3.1	Påliteligheten til systemer	19
3.2	Metoder til beregning av eksakt systempålitelighet for monotone systemer	23
3.3	Dynamisk systemanalyse	31
3.4	Mål for pålitelighetsmessig betydning av komponenter i et system	32
3.5	Assosierte tilfeldige variable	41
3.6	Øvre og nedre grenser for systempåliteligheten til monotone systemer	45
3.7	S-form teoremet	55
4	Bayesianske metoder i pålitelighetsanalyse	61
4.1	Bayes formel og Bayes teorem	61
4.2	Å posteriori tettheten i en eksponensiell modell	63
4.3	Litt Bayesiansk inferensteori	65
4.4	Bayes suffisiens	69
4.5	Alternative forsøksplaner for levetidstesting i en eksponensiell modell	70
4.6	Bayesiansk inferens for forventningen i en eksponensiell modell	75
4.7	Bayesiansk estimering av systempålitelighet	79
4.8	Grenser for momentene i tettheten til systempåliteligheten	81
5	To case-studier	88
5.1	Pålitelighetsanalyse av anlegg til propelldrift og strømproduksjon i små fiskebåter	88
5.2	Pålitelighetsanalyse av et nettverk for overføring av elektroniske pulser	95
	Appendix 1. Bevis av et sett ulikheter knyttet til inklusjons- eksklusjonsmetoden	101
	Appendix 2. Løsningsforslag til et eksamenssett i ST 105	103
	Referanser	115

Kapittel 1

Pålitelighetsanalyse i atomalderen

Før vi stuper inn i en verden av matematiske symboler bør vi ta oss tid til noen motiverende betraktninger. Disse er i stor grad hentet fra Natvig (1987). La oss først slå fast at med påliteligheten til et system menes sannsynligheten for at systemet fungerer etter intensjonene. Som eksempler på systemer kan nevnes kjernekraftverk, oljerigger samt utskyttingsanlegg og varslingsystemer for kjernefysiske våpen. Dette siste eksemplet kommenteres kort ved slutten av kapitlet. I pålitelighetsanalyse studeres sammenhengen mellom systemets pålitelighet og pålitelighetene av systemets komponenter. Et problem med dagens sikkerhetsanalyser av teknologiske systemer er at de ofte baserer seg på foreldete pålitelighetsanalytiske metoder. Formålet med dette kompendiet er da også å gi et innblikk i moderne pålitelighetsanalyse.

1.1 Kom Tsjernobyl-ulykken totalt uventet?

Kjernekraftutvalget avga sin innstilling til Olje- og energidepartementet i oktober 1978. Utvalget hevdet at:

“Risikoen for skade etter en kjernekraftulykke vil ligge et sted mellom risikoen for henholdsvis dambrudd og meteornedslag.”

Innstillingen ble sendt til høring til en lang rekke institusjoner, bl.a. til Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet, Universitetet i Oslo. 29. mars 1979 behandlet fakultetsrådet saken og vedtok enstemmig en innstilling fra et sakkyndig utvalg. Her heter det:

“Kjernekraftutvalget har basert sin risikostudie på den amerikanske risikostudie WASH-1400 (Rasmussen-rapporten). Mot denne studien er det framsett sterk kritikk.”

“Fra fakultetets fagstatistikere hevdes det at de innsigelser mot WASH-1400 som bl.a. er framkommet i “Lewis-rapporten” og i en svensk studie, er av en slik karakter at en person med god kompetanse i sannsynlighetsteori og statistikk kunne ha påvist det samme. Det kan derfor synes som om Kjernekraftutvalget ikke har benyttet fullgod statistisk ekspertise.”

“Videre står det strid om de metoder som er benyttet for å ta hensyn til komponenters avhengighet av hverandre. Fordi systemet dessuten er særdeles komplekst og det ikke foreligger nok data, vil derfor de numeriske verdier i WASH-1400 måtte tillegges mindre verdi.

Konklusjonen må bli at med korrekt bruk av sannsynlighetsteori og statistikk vil det konfidensintervallet som risikoen kan oppgis innenfor på bakgrunn av dagens data, ganske sikkert spenne over verdier fra det helt akseptable til det fullstendig uakseptable. Et mer presist intervallanslag for risikoen er bare mulig med et bedret datagrunnlag.”

Samme dag som fakultetsrådet behandlet saken, kom de første meldingene om Three Mile Island ulykken. Delvis også på grunn av denne stilte norske politikere seg skeptisk til kjernekraft allerede da. *Følgelig kom ikke Tsjernobyl-ulykken totalt uventet.*

Jukka Laaksonen, finsk senter for stråling og kjernekraftverksikkerhet, har sagt følgende om Tsjernobyl-ulykken:

“Den farlige tilstanden i reaktoren ble frembrakt av operatører som ikke hadde tilstrekkelig kunnskaper i reaktorfysikk og som med vilje brøt minst 6 viktige operasjonsregler. 4 av disse var slik at uten brudd på denne ene regelen, ville ulykken vært unngått. Det som utløste ulykken var en test av en generator. Ulykken var av en slik art at den umulig kunne vært forutsett av en risikoanalyse. De begivenheter som inngår i slike sikkerhetsanalyser av kjernekraft er blitt standardisert for 15 år siden!”

Det Tsjernobyl-ulykken gjorde var bl.a. å sette spørsmålsteget ved sikkerhetsanalyser av store teknologiske systemer.

1.2 Pålitelighetsanalyse anvendt på store teknologiske systemer

Ved anvendelse av pålitelighetsanalyse på slike systemer står en overfor følgende problemer:

- i) Mangel på kunnskap om hvordan systemet og dets komponenter funksjonerer
- ii) Mangel på data
- iii) Mangel på kunnskap om påliteligheten av de menneskelige komponenter
- iv) Mangel på kunnskap om kvaliteten av datamaskinprogrammene
- v) Mangel på kunnskap om avhengighetene mellom komponentene.

Dette gjør at det er vanskelig eller umulig å gi noen gode anslag på sannsynligheten for større ulykker for slike systemer. Å bruke risiko- og pålitelighetsanalyser til å gi ryggdekning for politiske avgjørelser om kontroversielle teknologiske systemer, er derfor ofte

høyst tvilsomt. Hvis imidlertid den politiske avgjørelsen er tatt, kan disse disiplinene bidra helt vesentlig til å *forbedre* systemenes pålitelighet. Dette er nettopp tilfellet for norsk offshore-virksomhet og svensk kjernekraftindustri.

Vi trenger da mål for den relative betydning av hver komponent for systempåliteligheten. De amerikanske professorene Barlow og Proschan foreslo i 1975 at den komponent som har størst sannsynlighet for å gi systemet “dødsstøtet”, er viktigst. Vi har siden dette utviklet en teori som underbygger noe annet. Den komponent, som ved å feile bidrar mest til å redusere den forventede gjenværende levetid for systemet, er viktigst. Slike mål vil bli diskutert nærmere i Kapittel 3.

Tsjernobyl-ulykken ga data som en manglet, men som enkelte fryktet. Hva slags teori har en så for å utnytte slike data i fremtidige risikoanalyser? Det som er karakteristisk for teorien her, er at en ønsker å utnytte data både for systemets komponenter og for systemet selv. Videre vil en pga. manglende data være helt avhengig av å kunne utnytte skjønn og erfaringer fra ingeniører om de teknologiske komponenter, og fra psykologer og sosiologer om de menneskelige komponenter. Dette leder til at en må basere seg på en statistisk metodelære som også naturlig utnytter subjektive sannsynligheter. En slik metodelære kalles Bayesiansk etter den engelske presten og sannsynlighetsteoretikeren Thomas Bayes som døde i 1761.

En starter da ut med fagfolkens skjønn og erfaringer om pålitelighetene til komponentene. Disse oppdateres så ut fra eksperimenter og ulykkesstatistikk for komponentene. Ut fra informasjon på komponentnivå utledes deretter anslag på systempåliteligheten. Disse anslag modifiseres ut fra skjønn og erfaringer på systemnivå. Endelig foretas en oppdatering av systempåliteligheten ut fra ulykkesstatistikk på systemnivå. Ulykkesdata fra f.eks. Tsjernobyl-ulykken utnyttet derfor både på komponent- og systemnivå. Teori på dette området er utviklet ved Universitetet i Oslo. Denne vil vi se nærmere på i Kapittel 4.

I magasinet Nature var det en artikkel 29. mai 1986 om en nestenulykke ved en fransk kjernefysisk reaktor i Le Bugey. Denne skjedde 14. april 1984. I fokus var et nød batteri som skulle gi 48 volts spenning over en av kontrollkretsene til reaktoren. I stedet for at spenningen falt momentant til null ved feil, slik det antas i dagens risikoanalyser, falt den sakte ned til 30 volt over en tretimers periode. Dette ledet til at reaktoren koblet seg av leveringsnettverket, men fortsatte med full kraftproduksjon. Da så nødkjølingen av reaktorkjernen holdt på å svikte, var en nær en katastrofe. Nature skriver at “dette viser at risikoanalyser ikke bare må ta i betraktning et ja eller nei, funksjons- eller feiltilstand, for hver komponent i reaktoren, men også muligheten for redusert funksjon.”

Barlow og Proschan initierte i 1978 oppbyggingen av en pålitelighetsteori der komponenter og system nettopp beskrives mer nyansert enn ved bare funksjons- og feiltilstand. Gjennom åttiårene har Universitetet i Oslo stått helt sentralt i videreutviklingen av denne teorien. En har også påvist hvordan slik teori kan anvendes på kraftforsyningssystemer og rørledningsnettverk offshore. Slik teori blir her presentert på hovedfagsnivå, og vil bare så vidt bli berørt i dette kompendiet i det andre case-studiet i Kapittel 5.

Et viktig felt som bare berøres i dette kompendiet, er konstruksjonspålitelighet. Dette feltet omfatter pålitelighet av konstruksjoner som broer og offshore installasjoner. Miljøbelastningene som konstruksjonen utsettes for beskrives ved en stokastisk prosess. Stoffet i dette kompendiet er viktig bakgrunnsstoff for dette feltet.

En kan kanskje få inntrykk av at pålitelighetsteorien på sikt vil løse alle sikkerhetsproblemer knyttet til store teknologiske systemer. I Natvig (1987) ser en nærmere på sannsynligheten for kjernefysisk krig ved uhell. Her argumenteres det sterkt for at dette problemet ikke har noen ren teknologisk løsning. Det fins bare en politisk vei å gå.

Kapittel 2

Deterministisk systemanalyse

Vi skal i dette kapitlet bare se på den strukturelle sammenheng mellom komponenter og system, dvs. vi skal foreta en *deterministisk* systemanalyse. Det er nødvendig å bruke litt tid på dette fordi mange begreper og en del notasjon innføres. I Kapittel 3 trekker vi så inn påliteligheten av komponenter og system, dvs. vi gjennomfører en stokastisk (*sannsynlighetsteoretisk*) systemanalyse. I begge tilfeller betraktes først systemet på et bestemt tidspunkt. Vi skal imidlertid også se på *dynamiske* modeller der utviklingen over tid trekkes inn.

2.1 Systemer av komponenter

Vi skiller her bare mellom to tilstander både for systemet og for hver enkelt komponent, en *funksjonerende* og en *ikke-funksjonerende*, på det bestemte tidspunkt vi betrakter. La ($i = 1, \dots, n$)

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i\text{-te komponent funksjonerer} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Tilsvarende la

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{hvis systemet funksjonerer} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

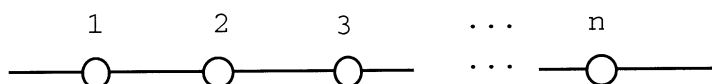
x_i og ϕ kalles *binære variable*.

Anta så at systemets tilstand er entydig bestemt ved komponentenes tilstander, dvs.

$$\phi = \phi(\underline{x}) \text{ der } \underline{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

$\phi(\cdot)$ kalles *strukturfunksjonen* til systemet. Antall komponenter, n , i systemet kalles systemets *orden*.

Eks. 2.1.1



Figur 2.1.1

En *seriestruktur* funksjonerer hvis og bare hvis (hvis) alle komponentene funksjonerer, dvs.

$$\phi(\underline{x}) = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^n x_i = \min_{1 \leq i \leq n} x_i.$$

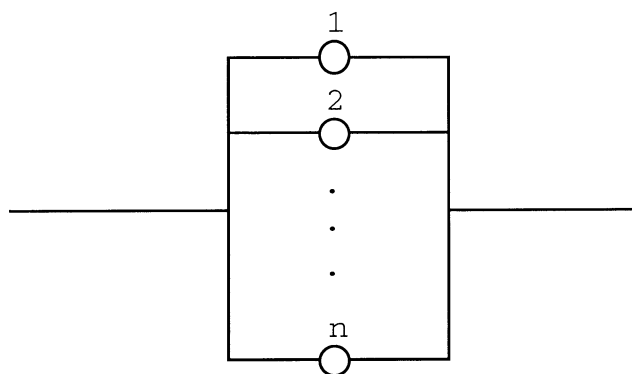
Notasjon 2.1.1

$$\prod_{i=1}^n a_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i)$$

$$a_1 \amalg a_2 = 1 - (1 - a_1)(1 - a_2)$$

for $0 \leq a_i \leq 1, i = 1, \dots, n$. \amalg kalles *ip-operatoren* (pi snudd om).

Eks. 2.1.2



Figur 2.1.2

En *parallelstruktur* funksjonerer hvis minst en av komponentene funksjonerer, dvs.

$$\phi(\underline{x}) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \prod_{i=1}^n x_i$$

Eks. 2.1.3

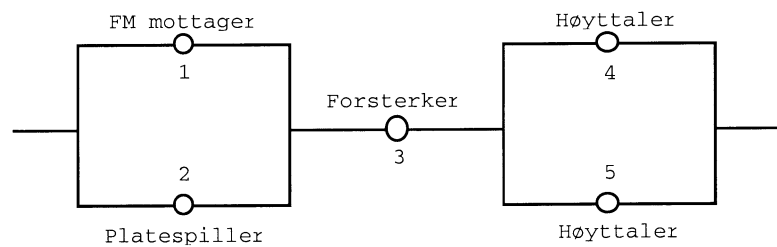
En *k-av-n struktur* funksjonerer hvis minst k av de n komponentene funksjonerer, dvs.

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Legg merke til at en n -av- n struktur rett og slett er en seriestruktur og at en 1-av- n struktur er en parallelstruktur.

Eks. 2.1.4

Betrakt stereoanlegget i Figur 2.1.3



Figur 2.1.3

Systemet fungerer hvis vi er i stand til å få frem “musikk” i en eller annen form. Følgelig har vi

$$\phi(\underline{x}) = (x_1 \amalg x_2)x_3(x_4 \amalg x_5)$$

Notasjon 2.1.2

$$\begin{aligned} (1_i, \underline{x}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ (0_i, \underline{x}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ (\cdot_i, \underline{x}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Lemma 2.1.1

For enhver strukturfunksjon av n -te orden har vi:

$$\phi(\underline{x}) = x_i \phi(1_i, \underline{x}) + (1 - x_i) \phi(0_i, \underline{x}) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1.1)$$

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{\underline{y} \in \{0,1\}^n} \prod_{i=1}^n x_i^{y_i} (1 - x_i)^{1-y_i} \phi(\underline{y}) \quad (2.1.2)$$

Her er $0^0 = 1$. (2.1.1) som er fundamental, gir oss muligheten til å uttrykke en strukturfunksjon av n -te orden ved hjelp av to strukturfunksjoner av orden $n - 1$. Dette kalles *pivotdekomposisjon*. (2.1.2) fremkommer ved gjentatt bruk av (2.1.1). Legg merke til at for i fast får vi faktoren x_i hvis $y_i = 1$, mens den blir $(1 - x_i)$ hvis $y_i = 0$.

Definisjon 2.1.2

Gitt en strukturfunksjon, ϕ , så defineres den *duale strukturfunksjon*, ϕ^D , av den *duale komponentvektor*, \underline{x}^D , ved

$$\phi^D(\underline{x}^D) = 1 - \phi(\underline{x}),$$

der

$$\underline{x}^D = (x_1^D, \dots, x_n^D) = (1 - x_1, \dots, 1 - x_n) = \underline{1} - \underline{x}.$$

Det en kort sagt gjør her er å se på systemet fra sabotørsynspunkt. Dette er nyttig f.eks. ved analyse av reléstrukturer som har to primær oppgaver. De skal både kunne lukke seg og åpne seg på kommando. Dette er nettopp duale oppgaver som analyseres henholdsvis ved en passende ϕ og ϕ^D . Det er ikke så vanskelig å vise at den duale struktur til en k -av- n struktur er en $(n - k + 1)$ -av- n struktur. Spesielt er dermed serie- og parallelstrukturen duale.

Øvelser

2.1.1 Bruk at $x_i^2 = x_i, i = 1, 2, 3$, til å vise at for en 2-av-3 struktur har vi:

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x}) &= x_1x_2 \amalg x_1x_3 \amalg x_2x_3 \\ &= x_1x_2x_3 + x_1x_2(1 - x_3) + x_1x_3(1 - x_2) + x_2x_3(1 - x_1)\end{aligned}$$

2.1.2 Bevis Lemma 2.1.1.

2.1.3 Vis at den duale struktur til en k -av- n struktur er en $(n - k + 1)$ -av- n struktur.

2.2 Koherente og monotone systemer

I et system burde alle komponenter i en viss forstand ha en positiv funksjon. Dette leder til:

Definisjon 2.2.1

i -te komponent er *relevant* for strukturen ϕ hvis ϕ ikke er en konstant funksjon av x_i , dvs. at

$$1 = \phi(1_i, \underline{x}) > \phi(0_i, \underline{x}) = 0 \quad \text{for minst en } (\cdot, \underline{x}).$$

Hvis ikke, er i -te komponent *irrelevant* for strukturen.

I tillegg vil det være naturlig at reparasjon av en komponent ikke gjør systemet dårligere. Dermed har vi:

Definisjon 2.2.2

Et system av komponenter sies å være *koherent* hvis

- i) $\phi(\underline{x})$ er en ikke-avtagende funksjon av $x_i, i = 1, \dots, n$
- ii) Alle komponenter er relevante.

Ved første øyekast kan det synes som om alle systemer vi møter i praksis er koherente. Dette er ikke riktig. Krav i) er f.eks. ofte ikke tilfredsstilt hvis det er uklart hva som svarer til funksjonstilstanden for noen av komponentene. Betrakt f.eks. et kjølerør og la:

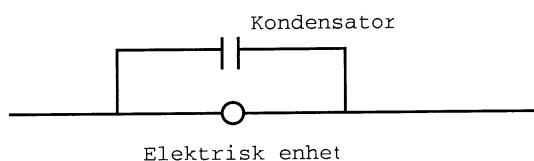
$$\begin{aligned}x_1 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis det renner vann fra høyre i røret} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\ x_2 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis det renner vann fra venstre i røret} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\ \phi(\underline{x}) &= \begin{cases} 1 & \text{hvis det renner vann i røret} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}\end{aligned}$$

Vi har da:

$$\phi(\underline{x}) = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1),$$

som ikke tilfredsstiller krav i).

Som eksempel på en irrelevant komponent betrakt den delen av en stor maskin som er illustrert i Figur 2.2.1.



Figur 2.2.1

Kondensatorens oppgave er å forhindre at den elektriske enheten blir ødelagt av høye spenninger. Som komponent betraktet, er kondensatoren irrelevant. Men selv om den er irrelevant, kan den være svært viktig idet den kan forlenge levetiden til enheten og følgelig levetiden til hele maskinen. Det bør tilføyes at problemet kan omgås ved å la den elektriske enheten og kondensatoren sammen utgjøre en komponent.

Ofte trenger vi ikke å kreve at alle komponentene er relevante for å utlede interessante resultater. Dette leder til:

Definisjon 2.2.3

Et system av komponenter sies å være *monotont* hviss

- i) $\phi(\underline{x})$ er en ikke-avtagende funksjon av $x_i, i = 1, \dots, n$
- ii) $\phi(\underline{0}) = 0, \phi(\underline{1}) = 1$.

Krav ii) sikrer at vi ikke har et helt trivielt system. Det kan vises at hvis i) holder, så er ii) ekvivalent med at systemet har minst en relevant komponent. Dermed gjelder:

Teorem 2.2.4

Ethvert koherent system er monotont.

Det fins i alt åtte forskjellige koherente systemer av orden til og med tre, hvis en ser bort fra permutasjoner i selve nummereringen av komponentene. Disse er

$$\begin{array}{lll}
 \phi(\underline{x}) = x_1 & \phi(\underline{x}) = x_1 \cdot x_2 & \phi(\underline{x}) = x_1 \amalg x_2 \\
 \phi(\underline{x}) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 & \phi(\underline{x}) = x_1 \amalg x_2 \amalg x_3 & \\
 \phi(\underline{x}) = x_1(x_2 \amalg x_3) & \phi(\underline{x}) = x_1 \amalg (x_2 \cdot x_3) & \\
 \phi(\underline{x}) = x_1 x_2 \amalg x_1 x_3 \amalg x_2 x_3 & &
 \end{array}$$

Hvis vi trenger å spesifisere den spesielle mengden, C , av komponenter som inngår i et system, betegnes dette som (C, ϕ) .

Notasjon 2.2.1

Betrakt en delmengde A av C . $\underline{x}^A =$ vektoren med komponenter, $x_i, i \in A$.

Vi kan lett vise følgende resultat.

Teorem 2.2.5

La (C, ϕ) være et monotont system med mengde av irrelevante komponenter A . Da er $(C - A, \phi(\underline{1}^A, \cdot))$ et koherent system.

Følgende resultat sier at i klassen av monotone systemer er parallellsystemet “det beste” og seriesystemet “det dårligste”.

Teorem 2.2.6

La ϕ være et monotont system. Da er:

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \phi(\underline{x}) \leq \prod_{i=1}^n x_i$$

Bevis:

Hvis $\prod_{i=1}^n x_i = 0$, er venstre ulikhet triviell. Hvis på den annen side $\prod_{i=1}^n x_i = 1$, må $\underline{x} = \underline{1}$, slik at $\phi(\underline{x}) = \phi(\underline{1}) = 1$ pga. ii) i Definisjon 2.2.3. Tilsvarende bevises høyre ulikhet.

La oss nå innføre følgende notasjon:

$$\begin{aligned} \underline{x} \amalg \underline{y} &= (x_1 \amalg y_1, x_2 \amalg y_2, \dots, x_n \amalg y_n) \\ \underline{x} \cdot \underline{y} &= (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n), \end{aligned}$$

svarende til henholdsvis komponentvis parallell - og seriekobling av vektorene \underline{x} og \underline{y} . Vi har nå:

Teorem 2.2.7

La ϕ være et monotont system. Da er:

- i) $\phi(\underline{x} \amalg \underline{y}) \geq \phi(\underline{x}) \amalg \phi(\underline{y})$
- ii) $\phi(\underline{x} \cdot \underline{y}) \leq \phi(\underline{x}) \cdot \phi(\underline{y})$

Anta i tillegg at ϕ er et koherent system. Likhet holder da i i) (ii)) for alle \underline{x} og \underline{y} hvis vi har en parallellstruktur (seriestruktur).

i) sier at komponentvis parallellkobling gir “bedre” resultat enn systemvis parallellkobling.
ii) sier at det motsatte gjelder for seriekobling. Teoremet er en matematisk presisering av noe som lenge har vært benyttet av sikkerhetsingeniører.

Bevis:

Siden ϕ er ikke-avtagende og $x_i \amalg y_i \geq x_i$ for $i = 1, \dots, n$, følger det at

$$\phi(\underline{x} \amalg \underline{y}) \geq \phi(\underline{x}).$$

Tilsvarende innsees at

$$\phi(\underline{x} \cdot \underline{y}) \leq \phi(\underline{y}).$$

Dermed følger

$$\phi(\underline{x} \amalg \underline{y}) \geq \max\{\phi(\underline{x}), \phi(\underline{y})\} = \phi(\underline{x}) \amalg \phi(\underline{y}),$$

og i) er bevist. ii) bevises helt analogt.

Anta nå at ϕ er en parallellstruktur. Da har vi for alle \underline{x} og \underline{y} at

$$\begin{aligned} \phi(\underline{x} \amalg \underline{y}) &= \prod_{i=1}^n (x_i \amalg y_i) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\max(x_i, y_i)\} \\ &= \max\{\max_{1 \leq i \leq n} x_i, \max_{1 \leq i \leq n} y_i\} = \phi(\underline{x}) \amalg \phi(\underline{y}) \end{aligned}$$

Anta omvendt at

$$\phi(\underline{x} \amalg \underline{y}) = \phi(\underline{x}) \amalg \phi(\underline{y}) \quad \text{for alle } \underline{x} \text{ og } \underline{y}.$$

Siden vi nå har antatt at ϕ er et koherent system og dermed at alle komponentene er relevante, følger det for vilkårlig $i = 1, \dots, n$ at

$$\phi(1_i, \underline{x}) = 1, \quad \phi(0_i, \underline{x}) = 0 \quad \text{for minst en } (\cdot, \underline{x}).$$

Dermed har vi for denne (\cdot, \underline{x}) at

$$\begin{aligned} 1 &= \phi(1_i, \underline{x}) = \phi((1_i, \underline{0}) \amalg (0_i, \underline{x})) \\ &= \phi(1_i, \underline{0}) \amalg \phi(0_i, \underline{x}) = \phi(1_i, \underline{0}) \amalg 0 \\ &= \phi(1_i, \underline{0}). \end{aligned}$$

Følgelig har vi siden $\phi(\underline{0}) = 0$, at

$$\phi((x_i)_i, \underline{0}) = x_i \quad x_i = 0, 1; \quad i = 1, \dots, n.$$

Dermed er for alle \underline{x}

$$\begin{aligned} \phi(\underline{x}) &= \phi(((x_1)_1, \underline{0}) \amalg ((x_2)_2, \underline{0}) \amalg \dots \amalg ((x_n)_n, \underline{0})) \\ &= \phi((x_1)_1, \underline{0}) \amalg \phi((x_2)_2, \underline{0}) \amalg \dots \amalg \phi((x_n)_n, \underline{0}) \\ &= x_1 \amalg x_2 \amalg \dots \amalg x_n = \prod_{i=1}^n x_i, \end{aligned}$$

og ϕ er et parallellsystem. Den andre ekvivalensen bevises helt analogt.

Øvelser

- 2.2.1 Bevis at en strukturfunksjon, ϕ , er ikke-avtagende hvis $\phi(1_i, \underline{x})$ og $\phi(0_i, \underline{x})$ begge er ikke-avtagende og at $\phi(1_i, \underline{x}) \geq \phi(0_i, \underline{x})$ for alle (\cdot, \underline{x}) .
- 2.2.2 Bevis at den duale struktur til en monoton struktur selv er monoton.
- 2.2.3 Bevis at hvis krav i) i Definisjon 2.2.3 holder, så er ii) ekvivalent med at systemet har minst en relevant komponent.

2.2.4 Hvorfor er ikke det koherente systemet

$$\phi(\underline{x}) = x_1 x_2 \coprod x_1 x_3$$

listet opp blant de åtte forskjellige koherente systemer av orden til og med tre?

2.2.5 Bevis Teorem 2.2.5.

2.3 Representasjon av monotone systemer ved stier og kutt

Notasjon 2.3.1

$\underline{y} < \underline{x}$ betyr at $y_i \leq x_i$ for $i = 1, \dots, n$ og $y_i < x_i$ for minst en i .

Notasjon 2.3.2

Mengden av komponenter $C = \{1, 2, \dots, n\}$ kan deles i to delmengder

$$C_0(\underline{x}) = \{i : x_i = 0\}, \quad C_1(\underline{x}) = \{i : x_i = 1\}$$

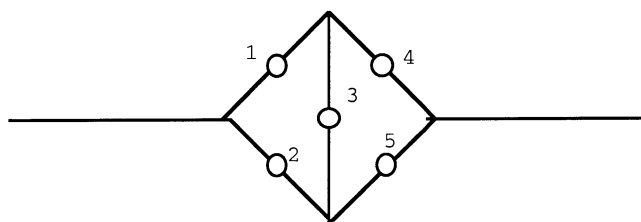
Definisjon 2.3.1

La ϕ være et monotont system. En vektor \underline{x} er en *stivektor* hvis $\phi(\underline{x}) = 1$. Den tilsvarende *stimengde* er $C_1(\underline{x})$. En *minimal stivektor* er en stivektor, \underline{x} , slik at $\underline{y} < \underline{x}$ medfører at $\phi(\underline{y}) = 0$. Den tilsvarende *minimale stimengde* er $C_1(\underline{x})$. En vektor \underline{x} er en *kuttvektor* hvis $\phi(\underline{x}) = 0$. Den tilsvarende *kuttmengde* er $C_0(\underline{x})$. En *minimal kuttvektor* er en kuttvektor, \underline{x} , slik at $\underline{y} > \underline{x}$ medfører at $\phi(\underline{y}) = 1$. Den tilsvarende *minimale kuttmengde* er $C_0(\underline{x})$.

En minimal stimengde er følgelig en minimal mengde komponenter som sikrer at systemet fungerer hvis disse fungerer. Tilsvarende er en minimal kuttmengde en minimal mengde komponenter som sikrer at systemet saboteres hvis disse saboteres.

Eks. 2.3.1

Betrakt brostrukturen illustrert i Figur 2.3.1



Figur 2.3.1

Det er lett å se at de minimale stimengdene er:

$$P_1 = \{1, 4\}, \quad P_2 = \{2, 5\}, \quad P_3 = \{1, 3, 5\}, \quad P_4 = \{2, 3, 4\},$$

mens de minimale kuttmengdene er:

$$K_1 = \{1, 2\}, \quad K_2 = \{4, 5\}, \quad K_3 = \{1, 3, 5\}, \quad K_4 = \{2, 3, 4\}.$$

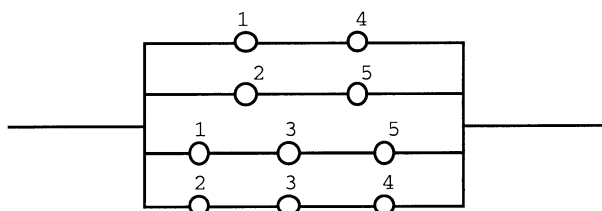
Til j -te minimale stimengde, P_j , i et monotont system kan vi tilordne følgende *minimale stiseriestruktur*

$$\rho_j(\underline{x}^{P_j}) = \prod_{i \in P_j} x_i, \quad j = 1, \dots, p.$$

Vi innser da at:

$$\phi(\underline{x}) = \prod_{j=1}^p \rho_j(\underline{x}^{P_j}) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} x_i. \quad (2.3.1)$$

Dvs. at ϕ kan representeres som en parallellstruktur av de minimale stiseriestrukturer. Brostrukturen i Eks. 2.3.1 kan derfor representeres som i Figur 2.3.2:



Figur 2.3.2

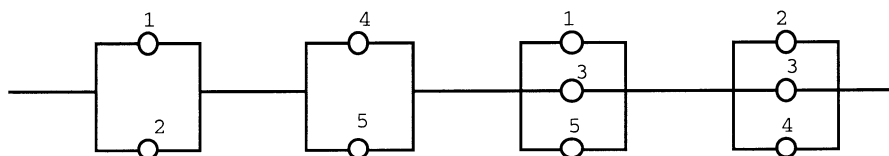
Tilsvarende kan en til j -te minimale kuttmengde, K_j , i et monotont system tilordne følgende *minimale kuttparallelstruktur*

$$\kappa_j(\underline{x}^{K_j}) = \prod_{i \in K_j} x_i, \quad j = 1, \dots, k$$

Vi innser da at

$$\phi(\underline{x}) = \prod_{j=1}^k \kappa_j(\underline{x}^{K_j}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} x_i. \quad (2.3.2)$$

ϕ er dermed representert som en seriestruktur av de minimale kuttparallelstrukturene. Brostrukturen i Eks. 2.3.1 kan derfor representeres som i Figur 2.3.3:



Figur 2.3.3

En informasjonsteknologisk utfordring i pålitelighetsanalyse er å utvikle raske algoritmer til å finne et systems minimale stier og kutt.

Det er lett å vise følgende resultater:

Teorem 2.3.2

Betrakt en monoton strukturfunksjon ϕ med dual strukturfunksjon ϕ^D . Da har vi:

- i) \underline{x} er en stivektor (kuttvektor) for ϕ hvis \underline{x}^D er en kuttvektor (stivektor) for ϕ^D .
- ii) En minimal stimengde (kuttmengde) for ϕ er en minimal kuttmengde (stimengde) for ϕ^D .

La oss nå gjøre et lite sidesprang til den dynamiske, deterministiske systemanalyse. Vi lar da systemet og dets komponenter operere i tid til de feiler. Ingen reparasjon foretas. La $(i = 1, \dots, n)$

$$\begin{aligned}t_i &= \text{tid til feil oppstår hos } i\text{-te komponent} \\ \underline{t} &= (t_1, \dots, t_n) \\ \tau_\phi(\underline{t}) &= \text{tid til feil oppstår i systemet .}\end{aligned}$$

Vi har da følgende teorem.

Teorem 2.3.3

For et monotont system ϕ med minimale stimengder P_1, \dots, P_p og minimale kuttmengder K_1, \dots, K_k har vi

$$\tau_\phi(\underline{t}) = \begin{cases} \max_{1 \leq j \leq p} \min_{i \in P_j} t_i \\ \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} t_i \end{cases}$$

Bevis:

Systemets levetid er lik levetiden til den minimale stiseriestrukturen som lever lengst. Dennes levetid er igjen lik levetiden til den komponent i strukturen som lever kortest. Derav følger den første likheten. Tilsvarende bevises den andre.

Teorem 2.3.3 viser at definisjonsområde og verdioråde for en monoton strukturfunksjon ϕ , representert ved (2.3.1) og (2.3.2), på en meningsfylt måte kan utvides fra $\{0, 1\}$ til $[0, \infty)$.

Øvelser

2.3.1 Finn alle sti- og kuttvektorene til brostrukturen i Eks. 2.3.1.

2.3.2 Finn representasjonene ved de minimale stimengder og ved de minimale kuttmengder for følgende monotone strukturer

- a) 2-av-3 systemet
- b) 3-av-4 systemet
- c) Seriesystemet av 3 komponenter
- d) Parallellsystemet av 4 komponenter

2.3.3 Bevis Teorem 2.3.2

2.3.4 Betrakt en koherent struktur (C, ϕ) med minimale stimengder P_1, \dots, P_p og minimale kuttmengder K_1, \dots, K_k . Vis at

$$\bigcup_{j=1}^p P_j = C = \bigcup_{j=1}^k K_j$$

2.3.5 Betrakt en monoton struktur ϕ med minimale stimengder P_1, \dots, P_p og minimale kuttmengder K_1, \dots, K_k og la f være en ikke-negativ funksjon definert over heltallene $\{1, \dots, n\}$. Vis at

$$\min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} f(i) = \max_{1 \leq j \leq p} \min_{i \in P_j} f(i)$$

2.4 Strukturell betydning av de enkelte komponenter

Hvis man betrakter strukturfunksjonen til et monotont system, er det klart at ikke alle komponenter er like viktige for å sikre at systemet funksjonerer. En komponent i serie med resten av systemet må f.eks. være viktigere enn en som er i parallell med resten av systemet. Vi trenger først følgende definisjon.

Definisjon 2.4.1

Betrakt en vektor (\cdot, \underline{x}) i et monotont system ϕ slik at

$$\phi(1_i, \underline{x}) = 1 \text{ og } \phi(0_i, \underline{x}) = 0.$$

$(1_i, \underline{x})$ kalles da en *kritisk stivektor* for i -te komponent, mens $(0_i, \underline{x})$ er en *kritisk kuttvektor* for i -te komponent. Den tilsvarende *kritiske stimengde* er $C_1(1_i, \underline{x})$ og den tilsvarende *kritiske kuttmengde* $C_0(0_i, \underline{x})$.

Legg merke til at $(1_i, \underline{x})$ ikke nødvendigvis er en minimal stivektor og at $(0_i, \underline{x})$ ikke nødvendigvis er en minimal kuttvektor. Hvis i -te komponent er relevant, eksisterer det minst en kritisk stivektor og en kritisk kuttvektor for i -te komponent. La nå

$$\begin{aligned} n_\phi(i) &= \sum_{(\cdot, \underline{x})} [\phi(1_i, \underline{x}) - \phi(0_i, \underline{x})] \\ &= \text{totalt antall kritiske stivektorer for } i\text{-te komponent} \\ &= \text{totalt antall kritiske stimengder for } i\text{-te komponent} \\ &= \text{totalt antall kritiske kuttvektorer for } i\text{-te komponent} \\ &= \text{totalt antall kritiske kuttmengder for } i\text{-te komponent} \end{aligned}$$

Følgende forslag til mål for den strukturelle betydning av en komponent ble gitt i Birnbaum (1969).

Definisjon 2.4.2

Birnbaum målet for den *strukturelle betydning*, $J_B^{(i)}$, av i -te komponent til en monoton struktur ϕ er gitt ved

$$J_B^{(i)} = n_\phi(i) / 2^{n-1}$$

Legg merke til at dette er frekvensen av kombinasjoner av de øvrige komponenttilstander der i -te komponents tilstand er kritisk for systemets tilstand. På grunnlag av beregninger av $J_B^{(i)}$ $i = 1, \dots, n$ kan komponentene ordnes etter strukturell betydning.

Eks. 2.4.1

La ϕ være en 2-av-3 struktur. Vi skal se på den strukturelle betydning av 1.komponent. De kritiske stivektorene for denne komponenten er $(1,1,0)$ og $(1,0,1)$. Følgelig er

$$J_B^{(1)} = 2/2^{3-1} = 1/2$$

Tilsvarende innsees at

$$J_B^{(2)} = J_B^{(3)} = 1/2.$$

At alle komponentene i en slik struktur har samme strukturelle betydning, følger selvfølgelig også av symmetribetraktninger.

Eks. 2.4.2

La strukturfunksjonen til ϕ være

$$\phi(\underline{x}) = x_1(x_2 \amalg x_3).$$

Herav følger at bare $(1,0,0)$ *ikke* er en kritisk stivektor for 1.komponent av de 4 mulighetene. Følgelig er

$$J_B^{(1)} = 3/4$$

Tilsvarende er kun $(1,1,0)$ en kritisk stivektor for 2.komponent. Dvs.

$$J_B^{(2)} = 1/4 = J_B^{(3)}.$$

Vi har da

$$J_B^{(1)} > J_B^{(2)} = J_B^{(3)},$$

som en kunne vente.

Øvelser

2.4.1 Beregn $J_B^{(i)}$ for komponentene i brostrukturen i Eks. 2.3.1.

2.4.2 La i -te komponent være i serie med resten av en monoton struktur ϕ , mens j -te komponent ikke er det. Vis at vi da har

$$J_B^{(i)} > J_B^{(j)}.$$

2.5 Moduler av monotone systemer

Ofte vil det være hensiktsmessig å dele et monotont system opp i delsystemer som først analyseres hver for seg før en til slutt analyserer hvordan disse igjen er forbundet. Et slikt delsystem vil vi kalle en modul. Betegn komplementmengden til en delmengde A av C med A^c . Vi har da følgende, tilsynelatende noe kryptiske, definisjon:

Definisjon 2.5.1

Det monotone system (A, χ) er en *modul* av det monotone system (C, ϕ) hvis

$$\phi(\underline{x}) = \psi(\chi(\underline{x}^A), \underline{x}^{A^c}),$$

der ψ er en monoton strukturfunksjon og $A \subseteq C$. Mengden A kalles en *modulmengde* til (C, ϕ) .

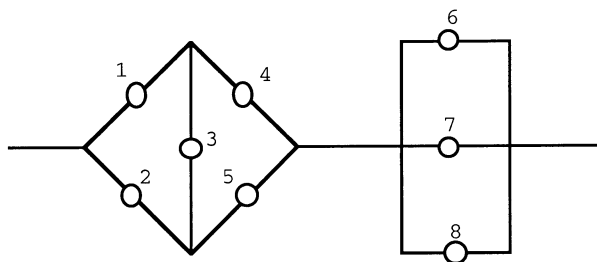
Strukturfunksjonen χ sammenkobler tilstandene til komponentene i modulmengden mens ψ sammenkobler modulens tilstand med de øvrige komponenttilstander. Vi kan betrakte en modul som en “kjempekomponent”. Mer generelt defineres:

Definisjon 2.5.2

En *modulær dekomposisjon* av et monotont system (C, ϕ) er en mengde av moduler $\{(A_i, \chi_i)\}_{i=1}^r$ sammenkoblet av en monoton organisasjonsstruktur ψ . Følgende krav gjelder:

- i) $C = \bigcup_{i=1}^r A_i$, der $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$
- ii) $\phi(\underline{x}) = \psi[\chi_1(\underline{x}^{A_1}), \dots, \chi_r(\underline{x}^{A_r})]$.

Eks. 2.5.1



Figur 2.5.1

Her kan vi la $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_2 = \{6, 7, 8\}$,

$$\chi_1(\underline{x}^{A_1}) = x_3[(x_1 \amalg x_2) \cdot (x_4 \amalg x_5)] + (1 - x_3)[x_1 x_4 \amalg x_2 x_5]$$

(som innsees ved å se på tilfellene $x_3 = 1$ og $x_3 = 0$),

$$\chi_2(\underline{x}^{A_2}) = x_6 \amalg x_7 \amalg x_8,$$

og endelig

$$\psi[\chi_1(\underline{x}^{A_1}), \chi_2(\underline{x}^{A_2})] = \chi_1(\underline{x}^{A_1}) \cdot \chi_2(\underline{x}^{A_2}).$$

Ofte er det umulig pga. f.eks. avhengighetene mellom komponentene å beregne systemets pålitelighet eksakt. Vi skal komme tilbake til dette. Det beste en kan oppnå er øvre og nedre grenser for denne uttrykt ved systemets minimale sti- og kuttmengder og komponentpålitelighetene. Et tilleggsproblem for store, komplekse systemer kan være at vi ikke greier å finne alle disse minimale sti- og kuttmengdene selv med den best tilgjengelige algoritme og en Cray stormaskin. Ved å innføre en passende modulær dekomposisjon, kan vi oppnå to fordeler. For det første oppnåes forbedrete grenser for systempåliteligheten. For det andre er disse basert på de minimale sti- og kuttmengdene til modulene og organisasjonsstrukturen. Siden disse systemene er langt mindre, finner vi kanskje disse mengdene greit.

Øvelser

2.5.1 La (A, χ) være en modul til (C, ϕ) . Anta at $\chi(\underline{x}_1^A) = 1$ og $\chi(\underline{x}_0^A) = 0$. Vis at da er

$$\phi(\underline{x}_1^A, \underline{x}) \equiv \phi(\underline{1}^A, \underline{x}), \phi(\underline{x}_0^A, \underline{x}) \equiv \phi(\underline{0}^A, \underline{x})$$

2.5.2 Finn alle modulene for følgende strukturfunksjon

$$\phi(\underline{x}) = (x_1(x_2 \amalg x_3)) \amalg (x_4 \amalg x_5).$$

2.5.3 Hvilke moduler har en k -av- n struktur med $1 < k < n$? Begrunn svaret.

Kapittel 3

Stokastisk systemanalyse

3.1 Påliteligheten til systemer

Vi forlater nå den deterministiske systemanalyse og går over til den tilsvarende stokastiske (sannsynlighetsteoretiske) ved å innføre som *tilfeldige variable*:

$$\begin{aligned} X_i &= i\text{-te komponents tilstand, } i = 1, \dots, n, \\ \phi(\underline{X}) &= \text{systemets tilstand, der } \underline{X} = (X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Dermed kan vi definere:

$$\begin{aligned} p_i &= P(X_i = 1) = EX_i = \text{påliteligheten til } i\text{-te komponent} \\ h &= P(\phi(\underline{X}) = 1) = E\phi(\underline{X}) = \text{påliteligheten til systemet.} \end{aligned}$$

Hvis spesielt X_1, \dots, X_n er uavhengige, har vi:

$$h = h(\underline{p}), \text{ der } \underline{p} = (p_1, \dots, p_n).$$

$h(\cdot)$ kalles *pålitelighetsfunksjonen* til systemet og kan oppfattes som generaliseringen av strukturfunksjonen i den stokastiske analyse. Dette er vist i det følgende teorem.

Teorem 3.1.1

Anta at komponentpålitelighetene er binære, dvs. $p_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n$. Da er:

$$h(\underline{p}) = \phi(\underline{p})$$

Bevis:

Siden vi nå (med sannsynlighet 1) er i den deterministiske situasjon, kan vi sette

$$x_i = p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Dermed har vi:

$$h(\underline{p}) = E\phi(\underline{X}) = \phi(\underline{x}) = \phi(\underline{p}).$$

Hvis X_1, \dots, X_n er avhengige, vil h også avhenge av hvordan komponentene funksjonerer simultant. Hvis en i dette tilfelle kun har informasjon om \underline{p} , er en bare i stand til å etablere øvre og nedre grenser for h . Det samme er riktig for store, komplekse systemer, også når komponenttilstandene er uavhengige, pga. regnetiden.

Det kan være verdt å slå fast her at en i pålitelighetsanalyse for all del ikke må tenke på systemene som rene teknologiske systemer. En kan bare minnes ulykkene i kjernekraftverkene på Three Mile Island i 1979 og i Tsjernobyl i 1986, samt enkelte av ulykkene på norsk kontinentalsokkel, for å overbevise seg om at systemer ofte har både teknologiske og menneskelige komponenter. Frem til nå har en gjerne konstruert systemer med svært pålitelige teknologiske komponenter, mens de menneskelige komponenter som betjener disse ofte er svært upålitelige. Ved å benytte mindre sofistikerte teknologiske komponenter som kanskje er noe mindre pålitelige, men som kan betjenes av de menneskelige komponenter med høy pålitelighet, kan det være mulig å oppnå en vesentlig forbedring av systempåliteligheten.

La oss beregne systempåliteligheten av noen enkle systemer av *uavhengige* komponenter.

Eks. 3.1.1 Seriesystem

$$h(\underline{p}) = E \prod_{i=1}^n X_i = \prod_{i=1}^n EX_i = \prod_{i=1}^n p_i$$

Eks. 3.1.2 Parallellsystem

$$\begin{aligned} h(\underline{p}) &= E \prod_{i=1}^n X_i = E[1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - EX_i) = \prod_{i=1}^n EX_i = \prod_{i=1}^n p_i \end{aligned}$$

Eks. 3.1.3 Brostruktur

$$\begin{aligned} h(\underline{p}) &= E[X_3(X_1 \prod X_2)(X_4 \prod X_5) + (1 - X_3)(X_1 X_4 \prod X_2 X_5)] \\ &= p_3(p_1 \prod p_2)(p_4 \prod p_5) + (1 - p_3)(p_1 p_4 \prod p_2 p_5) \end{aligned}$$

Eks. 3.1.4 k -av- n system med $p_i = p$, $i = 1, \dots, n$.

$$h(\underline{p}) = h(p) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Følgende lemma generaliserer Lemma 2.1.1.

Lemma 3.1.2

For pålitelighetsfunksjonen til et monotont system har vi:

$$h(\underline{p}) = p_i h(1_i, \underline{p}) + (1 - p_i) h(0_i, \underline{p}) \quad (3.1.1)$$

$$h(\underline{p}) = \sum_{\underline{x} \in \{0,1\}^n} \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1-p_i)^{1-x_i} \phi(\underline{x}) \quad (3.1.2)$$

Bevis:

Ved bruk av betinget sannsynlighet har vi:

$$h(\underline{p}) = P(\phi(\underline{X}) = 1) = P(X_i = 1)P(\phi(\underline{X}) = 1|X_i = 1) \\ + P(X_i = 0)P(\phi(\underline{X}) = 1|X_i = 0) = p_i h(1_i, \underline{p}) + (1 - p_i)h(0_i, \underline{p})$$

(3.1.2) kan vises ved gjentatt bruk av (3.1.1), men vises lettest direkte:

$$h(\underline{p}) = E\phi(\underline{X}) = \sum_{\underline{x} \in \{0,1\}^n} \phi(\underline{x})P(\underline{X} = \underline{x}) \\ = \sum_{\underline{x} \in \{0,1\}^n} \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{1-x_i} \phi(\underline{x})$$

(3.1.1) og (3.1.2) kan også vises ved å erstatte \underline{x} med \underline{X} i Lemma 2.1.1 og så ta forventningen på begge sider av likhetstegnene.

Av (3.1.2) ser vi at $h(\underline{p})$ er multilineær, dvs. lineær i hver p_i . Tilsvarende uttrykk til (3.1.1) og (3.1.2) gjelder også når komponenttilstandene er avhengige. De komponentpålitelighetene som da inngår blir betingete påliteligheter gitt noen av de øvrige komponenttilstandene. Slike uttrykk er f.eks. nyttige i konstruksjonspålitelighet der komponentene svarer til hovedelementene i konstruksjonen.

Legg merke til at vi i neste teorem trenger å anta at vi har et koherent system.

Teorem 3.1.3

La $h(\underline{p})$ være pålitelighetsfunksjonen til et koherent system. Da er $h(\underline{p})$ strengt voksende i hver p_i hvis $0 < p_i < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Bevis:

Fra (3.1.1) har vi

$$\frac{\partial h(\underline{p})}{\partial p_i} = h(1_i, \underline{p}) - h(0_i, \underline{p}) = E\phi(1_i, \underline{X}) - E\phi(0_i, \underline{X}) \\ = E[\phi(1_i, \underline{X}) - \phi(0_i, \underline{X})] = \sum_{(\cdot, \underline{x}) \in \{0,1\}^{n-1}} [\phi(1_i, \underline{x}) - \phi(0_i, \underline{x})]P((\cdot, \underline{X}) = (\cdot, \underline{x}))$$

Siden ϕ er ikke-avtagende, er addendene over ikke-negative. Siden videre i -te komponent er relevant, eksisterer det (\cdot, \underline{y}) slik at

$$\phi(1_i, \underline{y}) - \phi(0_i, \underline{y}) = 1.$$

Men nå er

$$P((\cdot, \underline{X}) = (\cdot, \underline{y})) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j^{y_j} (1 - p_j)^{1-y_j} > 0,$$

fordi $0 < p_i < 1$, $i = 1, \dots, n$. Dermed er

$$\frac{\partial h(\underline{p})}{\partial p_i} > 0,$$

og følgelig $h(\underline{p})$ strengt voksende i hver p_i .

Følgende teorem generaliserer Teorem 2.2.7 fra den deterministiske til den stokastiske systemanalyse.

Teorem 3.1.4

La $h(\underline{p})$ være pålitelighetsfunksjonen til et monotont system. Da er:

$$\text{i) } h(\underline{p} \amalg \underline{p}') \geq h(\underline{p}) \amalg h(\underline{p}')$$

$$\text{ii) } h(\underline{p} \cdot \underline{p}') \leq h(\underline{p}) \cdot h(\underline{p}')$$

for alle $\underline{p}, \underline{p}'$. Anta i tillegg at ϕ er et koherent system. Likhet holder da i i) (ii) for alle $\underline{p}, \underline{p}'$ hviss vi har en parallellstruktur (seriestruktur).

Husk her at f.eks.

$$\underline{p} \amalg \underline{p}' = (p_1 \amalg p'_1, p_2 \amalg p'_2, \dots, p_n \amalg p'_n),$$

der $p_i \amalg p'_i = 1 - (1 - p_i)(1 - p'_i)$ og *ikke* $\max(p_i, p'_i)$!

Bevis:

Vi har, idet det er underforstått i teoremet at \underline{X} og \underline{Y} er uavhengige, at:

$$\begin{aligned} & h(\underline{p} \amalg \underline{p}') - h(\underline{p}) \amalg h(\underline{p}') \\ &= E\phi(\underline{X} \amalg \underline{Y}) - E\phi(\underline{X}) \amalg E\phi(\underline{Y}) \\ &= E[\phi(\underline{X} \amalg \underline{Y}) - \phi(\underline{X}) \amalg \phi(\underline{Y})] \\ &= \sum_{\underline{x} \in \{0,1\}^n} \sum_{\underline{y} \in \{0,1\}^n} [\phi(\underline{x} \amalg \underline{y}) - \phi(\underline{x}) \amalg \phi(\underline{y})] P(\underline{X} = \underline{x}) P(\underline{Y} = \underline{y}) \end{aligned}$$

i) følger nå umiddelbart av i) i Teorem 2.2.7. ii) bevises helt analogt. Legg merke til at hvis $0 < p_i < 1$, $0 < p'_i < 1$ $i = 1, \dots, n$, da er som i beviset for Teorem 3.1.3

$$P(\underline{X} = \underline{x}) > 0, P(\underline{Y} = \underline{y}) > 0 \quad \text{for alle } \underline{x}, \underline{y}.$$

Vi har da at likhet holder i i) for alle $\underline{p}, \underline{p}'$ (og da spesielt for alle $\underline{p}, \underline{p}'$ slik at $0 < p_i < 1$, $0 < p'_i < 1$ $i = 1, \dots, n$) hviss

$$\phi(\underline{x} \amalg \underline{y}) - \phi(\underline{x}) \amalg \phi(\underline{y}) = 0 \quad \text{for alle } \underline{x}, \underline{y}$$

Den første ekvivalensen følger nå av tilsvarende ekvivalens i Teorem 2.2.7. Den andre ekvivalensen bevises helt analogt.

Eks. 3.1.5

Betrakt følgende struktur

$$\phi(\underline{x}) = x_1 \coprod (x_2 \cdot x_3)$$

av uavhengige komponenter med felles komponentpålitelighet p . Da er $h(p) = p + p^2 - p^3$ og fra Teorem 3.1.4 har vi da for alle $0 \leq p \leq 1$

$$\begin{aligned} h(p) \coprod h(p) &= 1 - [1 - (p + p^2 - p^3)]^2 \\ &\leq h(p \coprod p) = 2p - p^2 + (2p - p^2)^2 - (2p - p^2)^3 \end{aligned}$$

Øvelser

3.1.1 Anta $\phi_1(\underline{x}) \leq \phi_2(\underline{x})$ for alle \underline{x} . Vis at vi da har $h_1(\underline{p}) \leq h_2(\underline{p})$ for alle \underline{p} .
Under hvilke forutsetninger er den siste ulikheten streng?

3.1.2 Anta $h_1(\underline{p}) \leq h_2(\underline{p})$ for alle \underline{p} slik at $0 < p_i < 1, i = 1, \dots, n$. Vis at vi da har

$$\phi_1(\underline{x}) \leq \phi_2(\underline{x}) \text{ for alle } \underline{x}$$

3.2 Metoder til beregning av eksakt systempålitelighet for monotone systemer

A) Total tilstandsoppgransing

Som i beviset for Lemma 3.1.2 har vi

$$h = E\phi(\underline{X}) = \sum_{\underline{x} \in \{0,1\}^n} \phi(\underline{x})P(\underline{X} = \underline{x})$$

For det tilfellet at komponentene er uavhengige, får vi spesielt (3.1.2). Metoden er i prinsippet svært enkel, men antall ledd i summen, 2^n , vokser katastrofalt med økende n . Metoden er derfor lite egnet for store systemer. Den er også lite egnet for tilfellet med avhengige komponenter, siden en må kjenne hele simultanfordelingen for \underline{X} .

Metoden kan forbedres betraktelig ved at en ramser opp tilstandene i en intelligent rekkefølge. Hvis vi f.eks. støter på en \underline{x}_0 slik at $\phi(\underline{x}_0) = 0$, så behøver vi ikke å ramse opp de tilstandene der $\underline{x} < \underline{x}_0$ siden disse ikke bidrar til summen. Bemerk også, siden $\phi(\underline{0}) = 0$, at vi maksimalt må beregne $2^n - 1$ ledd.

B) Utmultipliseringsmetoden

Denne metoden består i å først finne de minimale stimengdene (alternativt de minimale kuttmengdene) til systemet. La disse være P_1, \dots, P_p (K_1, \dots, K_k). Vi tar så

utgangspunkt i formelen (2.3.1) ((2.3.2))

$$\phi(\underline{x}) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} x_i \quad (\phi(\underline{x}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} x_i)$$

Vi foretar så en utmultiplisering idet vi benytter at $x_i^r = x_i$, $i = 1, \dots, n$; $r = 1, 2, \dots$. Resultatet blir et uttrykk av formen

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{A \subseteq C} \delta(A) \prod_{i \in A} x_i$$

$\delta(A)$ betegner koeffisienten i leddet svarende til komponentmengden A og kalles strukturens *signerte dominasjonsfunksjon*. Ved nå å innføre store X_i -er i stedet for små, samt ta forventningen på begge sider av likhetstegnet, får vi:

$$h = E\phi(\underline{X}) = \sum_{A \subseteq C} \delta(A) P(\prod_{i \in A} X_i = 1) \quad (3.2.1)$$

For det tilfellet at komponentene er uavhengige, har vi:

$$h(\underline{p}) = \sum_{A \subseteq C} \delta(A) \prod_{i \in A} p_i$$

Selv om vi her summerer over alle $A \subseteq C$, dvs. 2^n mengder, vil summen ofte ikke inneholde på langt nær så mange ledd. Igjen må vi maksimalt beregne $2^n - 1$ ledd. En annen fordel i forhold til total tilstandsopprensing er at vi "bare" trenger informasjon om $P(\prod_{i \in A} X_i = 1)$, for alle A slik at $\delta(A) \neq 0$, i tilfellet med avhengige komponenter. Ulempene ved metoden er at den også involverer to andre tidkrevende operasjoner, nemlig å finne de minimale stimengdene (kuttmengdene) samt selve utmultipliseringen. Begge disse operasjonene er eksponensiell-tids operasjoner. Dette vil si at beregningstiden vil, uansett algoritme, i verste fall øke proporsjonalt med henholdsvis 2^p og 2^n .

C) Faktoreringsalgoritmen

Denne er faktisk allerede demonstrert i Eks. 3.1.3 der vi fant $h(\underline{p})$ for brostrukturen. Vi skal her gjøre to ikke strengt nødvendige antagelser. For det første antas komponentene å være uavhengige. Videre antas at systemet kan representeres som et *urettet nettverkssystem* (med to eller flere terminaler), eller som et k -av- n system. Algoritmen baserer seg på Lemma 3.1.2 samt på følgende mer eller mindre opplagte resultat.

Teorem 3.2.1

La $i, j \in C, i \neq j$.

- i) Dersom i og j er koblet i serie, vil $h(\underline{p})$ bare avhenge av p_i og p_j via $p_i \cdot p_j$. Følgelig kan i og j erstattes av en enkelt komponent (modul) e med pålitelighet $p_e = p_i \cdot p_j$ uten at systempåliteligheten endres. En slik reduksjon kalles en *serie-reduksjon*.

- ii) Dersom i og j er koblet i parallell, vil $h(\underline{p})$ bare avhenge av p_i og p_j via $p_i \prod p_j$. Følgelig kan i og j erstattes av en enkelt komponent (modul) e med pålitelighet $p_e = p_i + p_j - p_i p_j$ uten at systempåliteligheten endres. En slik reduksjon kalles en *parallell-reduksjon*.

Fellesbetegnelsen på en serie- og parallell-reduksjon er *s-p-reduksjon*.

Definisjon 3.2.2

Vi sier at et system er *s-p-reduserbart* dersom det finnes komponenter i serie eller i parallell i systemet. Hvis ikke, sies det å være *komplekst*. Et system som kan *s-p* reduseres til én enkelt komponent, kalles et *s-p-system*.

Dermed har vi:

Algoritme 3.2.3 (Faktoreringsalgoritmen)

La (C, ϕ) være et monotont system, dvs. anta at minst en av komponentene er relevante. $h(\underline{p})$ beregnes da som følger:

Skritt 1. Utfør alle mulige *s-p*-reduksjoner.

La (C^r, ϕ^r) betegne det reduserte systemet. Det er lett å innse at også (C^r, ϕ^r) har minst en relevant komponent.

Skritt 2. Vi har nå ett av to mulige tilfeller:

Tilfelle 1. (C^r, ϕ^r) inneholder akkurat én relevant komponent med oppdatert pålitelighet p_e . Da er $h(\underline{p}) = p_e$.

Tilfelle 2. (C^r, ϕ^r) inneholder flere relevante komponenter. Velg i så fall en *pivotkomponent* $e \in C^r$, og beregn $h(\underline{p})$ ved Lemma 3.1.2

$$h(\underline{p}^{C^r}) = p_e h(1_e, \underline{p}^{C^r}) + (1 - p_e) h(0_e, \underline{p}^{C^r})$$

$h(1_e, \underline{p}^{C^r})$ og $h(0_e, \underline{p}^{C^r})$ beregnes så ved gjentatt bruk av algoritmen.

Brostrukturen er et komplekst system. Vi valgte 3.komponent som pivotkomponent og sto igjen med 2 *s-p*-systemer. Generelt avhenger effektiviteten til faktoreringsalgoritmen av hvilken komponent man pivoterer med hensyn på. Et dyptloddende resultat viser at en bør pivotere slik at begge understrukturene blir koherente. Dette er vist i Huseby (1984). I verste fall reduserer denne metoden seg til total tilstandsoppromsing. I beste fall er den uhyre slagkraftig.

D) Inklusjons-eksklusjonsmetoden

I likhet med utmultipliseringsmetoden har også denne metoden den svakhet at vi først må finne de minimale stimengdene (alternativt de minimale kuttmengdene) til systemet.

La disse være $P_1, \dots, P_p(K_1, \dots, K_k)$. Innfør så begivenhetene ($j = 1, \dots, p$) :

$$E_j = \{\text{Alle komponenter i } P_j \text{ funksjonerer}\}$$

Vi har da:

$$h = P\left(\bigcup_{j=1}^p E_j\right)$$

Denne sannsynligheten kan så beregnes ved å bruke den generelle addisjonssetning. La

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq p} P[E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_j}] \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq p} P\left[\bigcap_{s \in P_{i_1} \cup \dots \cup P_{i_j}} (X_s = 1)\right] \end{aligned}$$

Da er

$$h = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} S_j \quad (3.2.2)$$

For $p = 2$ har vi det velkjente

$$h = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2),$$

mens $p = 3$ gir

$$h = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

For det tilfellet at komponentene er uavhengige, har vi:

$$h(p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq p} \prod_{s \in P_{i_1} \cup \dots \cup P_{i_j}} p_s$$

Antall ledd i disse summene er ved binomialformelen

$$\sum_{j=1}^p \binom{p}{j} = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} 1^j 1^{p-j} - 1 = (1+1)^p - 1 = 2^p - 1$$

Dette vokser igjen katastrofalt med økende p slik at metoden er ubrukelig for store systemer. Det kan imidlertid vises at (se Appendix 1):

$$\begin{aligned} h &\leq S_1 \\ h &\geq S_1 - S_2 \\ h &\leq S_1 - S_2 + S_3 \\ h &\geq S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \quad \text{osv.}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

slik at vi kan oppnå øvre og nedre grenser for systempåliteligheten. Selv om vi ikke nødvendigvis har at

$$\begin{aligned} S_1 &\geq S_1 - S_2 + S_3 \quad \text{osv.} \\ S_1 - S_2 &\leq S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \quad \text{osv.}, \end{aligned}$$

så vil ved enkelte anvendelser de høyere ordens leddene bli såvidt små at grensene raskt blir gode.

Alternativt kunne vi innført begivenhetene ($j = 1, \dots, k$):

$$F_j = \{\text{Ingen av komponentene i } K_j \text{ funksjonerer}\},$$

og tatt utgangspunkt i at:

$$h = 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^k F_j\right)$$

Dette gir også en alternativ og supplerende måte til å beregne øvre og nedre grenser for h . Det enkleste settet av grenser gir nå:

$$1 - \sum_{j=1}^k P(F_j) \leq h \leq \sum_{j=1}^p P(E_j)$$

For det tilfellet at komponentene er uavhengige, har vi spesielt:

$$1 - \sum_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} (1 - p_i) \leq h(\underline{p}) \leq \sum_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} p_i \quad (3.2.4)$$

Eks. 3.2.1

Betrakt brostrukturen i Eks. 2.3.1 av uavhengige komponenter med pålitelighetsfunksjon $h(\underline{p})$ gitt i Eks. 3.1.3. Anta at alle de fem komponentene har pålitelighet 0.9. Det er da lett å regne seg frem til at (3.2.4) i dette tilfellet reduserer seg til

$$0.978 \leq 0.97848 \leq 3.078$$

Vi ser altså at den nedre grensen i dette tilfellet er glimrende, mens den øvre grensen til og med langt overskrider 1. Lar vi derimot de fem komponentene ha den duale pålitelighet 0.1, fremstår det fullstendig duale resultat

$$-2.078 \leq 0.02152 \leq 0.022.$$

Vi skal nå se på sammenhengen mellom utmultipliseringsmetoden og inklusjons-eksklusjonsmetoden. Utmultipliseringsmetoden er basert på formel (3.2.1), mens inklusjons-eksklusjonsmetoden baserer seg på formel (3.2.2). Denne siste kan skrives på formen

$$h = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq p} P\left[\prod_{s \in P_{i_1} \cup \dots \cup P_{i_j}} (X_s = 1)\right] \quad (3.2.5)$$

Vi ser nå at addendene i (3.2.1) og (3.2.5) er på felles form, nemlig

$$c \cdot P\left(\prod_{i \in A} X_i = 1\right)$$

I (3.2.1) er $c = \delta(A)$, mens i (3.2.5) er c enten lik 1 eller -1 . Forskjellen på (3.2.1) og (3.2.5) er at for fast $A \subseteq C$ inngår addenden $P(\prod_{i \in A} X_i = 1)$ høyst en gang i (3.2.1), nemlig hvis $\delta(A) \neq 0$, mens denne addenden kan inngå flere ganger i (3.2.5). (3.2.1) representerer derfor en komprimert utgave av (3.2.5) der en har trukket sammen ledd med felles sannsynlighetsfaktor $P(\prod_{i \in A} X_i = 1)$.

Vi ser at vi i (3.2.5) får et bidrag med sannsynlighetsfaktor $P(\prod_{i \in A} X_i = 1)$ for hver union av minimale stimengder som er lik mengden A . Bidraget blir positivt (negativt) hvis antall minimale stimengder er odde (like). Dermed har vi:

$$\delta(A) = \begin{aligned} & \text{antall odde unioner av minimale stimengder som er lik } A \\ & - \text{antall like unioner av minimale stimengder som er lik } A \end{aligned}$$

Spesielt får vi at:

$$\delta(A) = 0 \quad \text{dersom } A \text{ ikke kan skrives som en union av minimale stimengder, eller} \\ \text{når antall odde unioner av minimale stimengder som er lik } A, \text{ er lik antall} \\ \text{like slike unioner.}$$

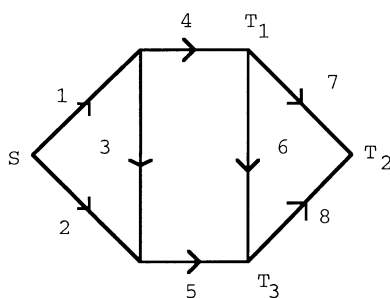
Av dette innser vi at utmultipliseringsmetoden ofte er mindre informasjonskrevende enn inklusjons-eksklusjonsmetoden for tilfellet med avhengige komponenter. Hva angår beregningstid, er de to metodene likeverdige.

For spesielle strukturer kan imidlertid disse metodene forbedres dramatisk.

Definisjon 3.2.4

Et SKT (Source to K Terminal)-system er et rettet nettverk der systemet fungerer hvis en node S kan sende informasjon til et gitt sett noder T_1, \dots, T_K .

Eks. 3.2.2 S3T-system



Figur 3.2.1

Teorem 3.2.5

La

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{A \subseteq C} \delta(A) \prod_{i \in A} x_i$$

være strukturfunksjonen til et SKT-system. Da har vi:

i) $\delta(A) = 0$ dersom A ikke kan skrives som en union av minimale stimengder, eller hvis subgrafene svarende til A inneholder en syklus.

ii) I motsatt fall er

$$\delta(A) = (-1)^{n(A)-v(A)+1},$$

der

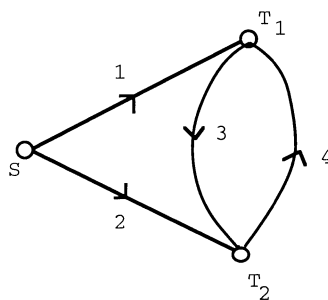
$n(A)$ = antall elementer i A

$v(A)$ = antall noder i subgrafene svarende til A.

Dette dyptloddende resultat er etablert av Satyanarayana (1982), mens det enkleste bevis er gitt i Huseby (1984). Dette hører igjen hjemme på hovedfagsnivå.

Eks. 3.2.2

Betrakt S2T-systemet gitt i Figur 3.2.2.



Figur 3.2.2

Systemet funksjonerer hvis S kan sende informasjon til T_1 og T_2 . Grafen inneholder syklusen $\{3, 4\}$. De minimale stimengdene er:

$$P_1 = \{1, 2\}, \quad P_2 = \{1, 3\}, \quad P_3 = \{2, 4\}.$$

Vi ønsker å skrive $\phi(\underline{x})$ på enklest mulig måte ved å benytte Teorem 3.2.5. Vi ser at:

$$A_1 = \{3, 4\}, \quad A_2 = \{1, 3, 4\}, \quad A_3 = \{2, 3, 4\}, \quad A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

svarer til subgrafer som inneholder syklusen. Videre ser vi at:

$$A_5 = \{1\}, \quad A_6 = \{2\}, \quad A_7 = \{3\}, \quad A_8 = \{4\}, \quad A_9 = \{1, 4\}, \quad A_{10} = \{2, 3\}$$

ikke kan skrives som unioner av minimale stimengder. Tilbake har vi:

$$A_{11} = \{1, 2\}, \quad A_{12} = \{1, 3\}, \quad A_{13} = \{2, 4\}, \quad A_{14} = \{1, 2, 3\}, \quad A_{15} = \{1, 2, 4\}$$

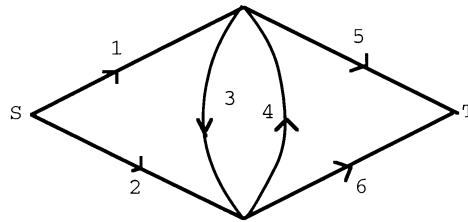
Følgelig har vi:

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x}) &= (-1)^{2-3+1}x_1x_2 + (-1)^{2-3+1}x_1x_3 + (-1)^{2-3+1}x_2x_4 \\ &\quad + (-1)^{3-3+1}x_1x_2x_3 + (-1)^{3-3+1}x_1x_2x_4 \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 - x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4\end{aligned}$$

Den tilhørende pålitelighetsfunksjonen er da selvsagt

$$h(\underline{p}) = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3 - p_1p_2p_4$$

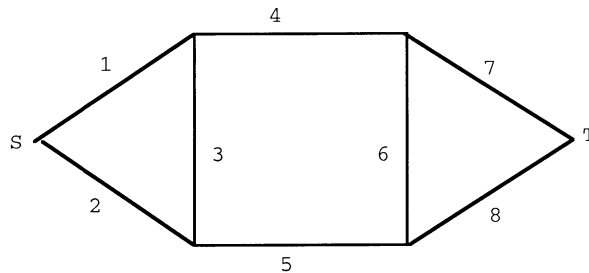
Øvelser



Figur 3.2.3

3.2.1 Betrakt S1T-systemet i Figur 3.2.3.

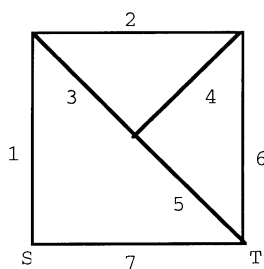
- Finne de minimale stimengdene til systemet.
- Hvor mange ledd vil vi få i inklusjons-eksklusjonsformelen for påliteligheten til dette systemet (før vi trekker sammen)?
- Hvor mange av disse leddene faller mot hverandre?



Figur 3.2.4

3.2.2 Beregn pålitelighetsfunksjonen til det urettede nettverkssystem i Figur 3.2.4 som fungerer dersom nodene S og T kan kommunisere gjennom nettverket. Benytt faktoreringsalgoritmen.

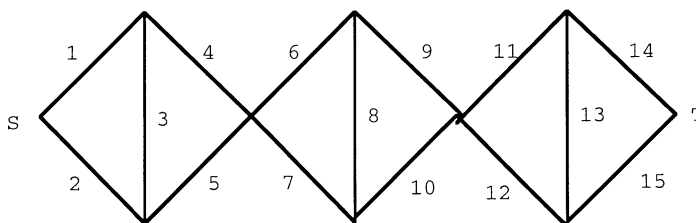
3.2.3 Beregn pålitelighetsfunksjonen til det urettede nettverkssystem i Figur 3.2.5 ved å benytte faktoreringsalgoritmen.



Figur 3.2.5

Siden systemet er komplekst, må det faktoriseres med hensyn på en eller annen komponent. Hvilken komponent? Sammenlign beregningsarbeidet for ulike komponentutvalg.

3.2.4 Betrakt seriekoblingen av brostrukturer i Figur 3.2.6.



Figur 3.2.6

- Beregn pålitelighetsfunksjonen til systemet ved faktoreringsalgoritmen.
- Beregn denne i stedet ved å ta produktet av de tre pålitelighetsfunksjonene for de tre brostrukturene. Sammenlign beregningsarbeidet med det i a).
- Hvor mange ledd vil vi få i inklusjons-eksklusjonsformelen for påliteligheten til dette systemet? Kommenter antallet.

3.3 Dynamisk systemanalyse

Bortsett fra Teorem 2.3.3 har vi til nå bare betraktet komponenter og system på et bestemt tidspunkt. Vi skal nå trekke inn utviklingen over tid. Dette spranget er svært kort. La for $t \geq 0$, $i = 1, \dots, n$:

$$X_i(t) = i\text{-te komponents tilstand ved tiden } t,$$

der vi her antar at de stokastiske prosessene $\{X_i(t), t \geq 0\}_{i=1}^n$ er uavhengige.

$$\phi(\underline{X}(t)) = \text{systemets tilstand ved tiden } t.$$

Innfør også:

$$p_i(t) = P(X_i(t) = 1) = \text{påliteligheten til } i\text{-te komponent ved } t,$$
$$h(\underline{p}(t)) = P(\phi(\underline{X}(t)) = 1) = \text{påliteligheten til systemet ved } t.$$

Vi ser nå bort fra reparasjon og lar videre ($i = 1, \dots, n$):

$$T_i = \text{levetid for } i\text{-te komponent}$$
$$S = \text{levetid for systemet}$$

La nå T_i ha kumulativ fordelingsfunksjon F_i , $i = 1, \dots, n$ og S kumulativ fordelingsfunksjon G . F_i -ene antas kjent, mens G skal bestemmes. Vi har følgende relasjon:

$$p_i(t) = P(X_i(t) = 1) = P(T_i > t) = 1 - F_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{F}_i(t),$$

som igjen bestemmer

$$G(t) = 1 - P(S > t) = P(\phi(\underline{X}(t)) = 0) = 1 - h(\underline{p}(t))$$

Dermed er vi faktisk fremme.

3.4 Mål for pålitelighetsmessig betydning av komponenter i et system

Det er to hovedgrunner til å se på slike mål. For det første gir det analytikeren mulighet til å si hvilke komponenter en bør videreutvikle for å forbedre systempåliteligheten til minst mulig kostnad og anstrengelse. For det andre kan det brukes til å utarbeide en sjekklister ved reparasjon for å finne årsakene til systemfeil på en effektiv måte.

Birnbaum (1969) foreslo følgende mål.

Definisjon 3.4.1

Betrakt en monoton struktur ϕ av uavhengige komponenter på tidspunkt t . Birnbaum målet for den pålitelighetsmessige betydning av i -te komponent på tidspunkt t , $I_B^{(i)}(t)$, er gitt ved

$$I_B^{(i)}(t) = \partial h(\underline{p}(t)) / \partial p_i(t), \quad i = 1, \dots, n$$

En bedre fortolkning er gitt i følgende teorem.

Teorem 3.4.2

Betrakt en monoton struktur ϕ av uavhengige komponenter på tidspunkt t . Da er:

$$I_B^{(i)}(t) = P[(1_i, \underline{X}(t)) \text{ er en kritisk stivektor for } i\text{-te komponent}]$$

Bevis:

Fra Lemma 3.1.2 har vi:

$$\begin{aligned}
 I_B^{(i)}(t) &= h(1_i, \underline{p}(t)) - h(0_i, \underline{p}(t)) \\
 &= E[\phi(1_i, \underline{X}(t)) - \phi(0_i, \underline{X}(t))] \\
 &= P[\phi(1_i, \underline{X}(t)) - \phi(0_i, \underline{X}(t)) = 1] \\
 &= P[(1_i, \underline{X}(t)) \text{ er en kritisk stivektor for } i\text{-te komponent}]
 \end{aligned}$$

Dette er sannsynligheten for at systemet er i en tilstand ved tiden t slik at i -te komponents tilstand er kritisk for systemets tilstand. For tilfellet med avhengige komponenter kan denne sannsynligheten brukes som definisjon. De såkalte sensitivitetsmål som brukes i fagområdet konstruksjonspålitelighet, er nær beslektet med Birnbaum målet.

Teorem 3.4.3

For en monoton struktur har vi alltid

$$0 \leq I_B^{(i)}(t) \leq 1 \quad (3.4.1)$$

Hvis i tillegg komponentene er uavhengige, $0 < p_i(t) < 1$, $i = 1, \dots, n$ og i -te komponent er relevant, er:

$$0 < I_B^{(i)}(t) \quad (3.4.2)$$

Hvis på toppen ytterligere en komponent er relevant, er:

$$I_B^{(i)} < 1 \quad (3.4.3)$$

Bevis:

(3.4.1) følger trivielt av Teorem 3.4.2. (3.4.2) følger umiddelbart av beviset for Teorem 3.1.3. Anta at $I_B^{(i)}(t) = 1$. Skal vise at dette leder til en selvmotsigelse slik at (3.4.3) holder. Utfra antagelsen følger det at

$$E[\phi(1_i, \underline{X}(t)) - \phi(0_i, \underline{X}(t))] = 1$$

Siden $0 < p_i(t) < 1$, $i = 1, \dots, n$, medfører dette at

$$\phi(1_i, \underline{x}) = 1 \quad \phi(0_i, \underline{x}) = 0 \quad \text{for alle } (\cdot, \underline{x})$$

Dermed har vi

$$\phi(1_j, \underline{x}) = \phi(0_j, \underline{x}) \quad \text{for alle } j \neq i \text{ og alle } (\cdot, \underline{x})$$

Dette betyr at alle komponentene bortsett fra den i -te er irrelevante, hvilket strider mot antagelsen om at ytterligere en komponent er relevant.

Husk at Birnbaum målet for den *strukturelle betydning* $J_B^{(i)}$, av i -te komponent var *frekvensen* av kombinasjoner av de øvrige komponenttilstander der i -te komponents tilstand er kritisk for systemets tilstand. $I_B^{(i)}(t)$ er ifølge Teorem 3.4.2 *sannsynligheten* for

at de øvrige komponenttilstander ved tiden t er slik at i -te komponents tilstand er kritisk for systemets tilstand. $I_B^{(i)}(t)$ er derfor en naturlig generalisering av $J_B^{(i)}$. Spesielt har vi fra Teorem 3.4.2 og Definisjon 2.4.2 at

$$I_B^{(i)}(t) = J_B^{(i)} \quad \text{for } p_i(t) = \frac{1}{2} \quad i = 1, \dots, n.$$

Fra kjederegelen for derivasjon har vi

$$\frac{\partial h(\underline{p}(t))}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\underline{p}(t))}{\partial p_i(t)} \frac{\partial p_i(t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n I_B^{(i)}(t) \frac{\partial p_i(t)}{\partial t} \quad (3.4.4)$$

Her er t en felles parameter, f.eks. tiden siden systemutviklingen startet. (3.4.4) sier da at vekstraten for systempåliteligheten er en veiet sum av vekstratene til komponentpålitelighetene. Vektene er de enkelte komponenters pålitelighetsmessige betydning.

I de følgende eksempler har vi uten tap av generalitet nummerert komponentene slik at

$$p_1(t) \leq p_2(t) \leq \dots \leq p_n(t)$$

Eks. 3.4.1 Seriestruktur

$$I_B^{(i)}(t) = \partial \prod_{j=1}^n p_j(t) / \partial p_i(t) = \prod_{j \neq i} p_j(t)$$

slik at

$$I_B^{(1)}(t) \geq I_B^{(2)}(t) \geq \dots \geq I_B^{(n)}(t)$$

Dette betyr at komponenten med lavest pålitelighet ved tiden t , har størst pålitelighetsmessig betydning på dette tidspunkt. Dette samsvarer med at "ingen kjede er sterkere enn det svakeste ledd".

Eks. 3.4.2 Parallellstruktur

$$I_B^{(i)}(t) = \partial \prod_{j=1}^n p_j(t) / \partial p_i(t) = \prod_{j \neq i} (1 - p_j(t))$$

slik at

$$I_B^{(1)}(t) \leq I_B^{(2)}(t) \leq \dots \leq I_B^{(n)}(t)$$

Dette betyr at komponenten med høyest pålitelighet ved tiden t , har størst pålitelighetsmessig betydning på dette tidspunkt. For et parallellsystem er i -te komponents tilstand kritisk for systemets tilstand hviss de øvrige komponentene ikke funksjonerer. Det er da klart at komponenten med høyest pålitelighet på tidspunkt t har størst sannsynlighet for å være eneste overlevende komponent på dette tidspunkt. Resultatet er derfor intuitivt opplagt.

Eks. 3.4.3 2-av-3 struktur

Ved å bruke resultatet i Øvelse 2.1.1 får vi raskt at

$$h(\underline{p}(t)) = p_1(t)p_2(t) + p_1(t)p_3(t) + p_2(t)p_3(t) - 2p_1(t)p_2(t)p_3(t)$$

Dette gir

$$\begin{aligned} I_B^{(1)}(t) &= p_2(t) + p_3(t) - 2p_2(t)p_3(t) \\ I_B^{(2)}(t) &= p_1(t) + p_3(t) - 2p_1(t)p_3(t) \\ I_B^{(3)}(t) &= p_1(t) + p_2(t) - 2p_1(t)p_2(t) \end{aligned}$$

Ved å benytte at funksjonen $f(x, y) = x + y - 2xy$ er ikke-avtagende (ikke-voksende) i x og y for $x, y \leq \frac{1}{2}$ ($x, y \geq \frac{1}{2}$), får vi at

$$I_B^{(1)}(t) \geq I_B^{(2)}(t) \geq I_B^{(3)}(t) \quad \text{for } p_1(t) \leq p_2(t) \leq p_3(t) \leq \frac{1}{2} \quad (3.4.5)$$

mens

$$I_B^{(1)}(t) \leq I_B^{(2)}(t) \leq I_B^{(3)}(t) \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq p_1(t) \leq p_2(t) \leq p_3(t) \quad (3.4.6)$$

(3.4.5) gir samme ordning som for seriestrukturen. Dette er ikke så rart siden en 2-av-3 struktur av mindre pålitelige komponenter er “nær” en 3-av-3 struktur. Tilsvarende “innsees” at (3.4.6) gir samme ordning som for parallellstrukturen. Hovedbudskapet til dette enkle eksemplet er likevel at intuisjonen er lite brukbar for å rangere den pålitelighetsmessige betydning av komponenter i et komplekst system.

Følgende mål foreslått av Vesely og Fussell (se Fussell (1975)) er mye brukt i kjernekraftindustrien og innarbeidet i uttallige programpakker i pålitelighetsanalyse.

Definisjon 3.4.4

Betrakt en monoton struktur ϕ av uavhengige komponenter på tidspunkt t . Vesely-Fussell målet for den pålitelighetsmessige betydning, $I_{V-F}^{(i)}(t)$, av i -te komponent på tidspunkt t , er gitt ved

$$I_{V-F}^{(i)}(t) = P[X_i(t) = 0 | \phi(\underline{X}(t)) = 0] \quad i = 1, \dots, n$$

Denne definisjonen tar hensyn til at en komponent ved å feile kan bidra til systemfeil, uten å ha vært kritisk for systemets tilstand. På bakgrunn av følgende innvendinger er det utrolig at dette målet er så utbredt

- i) alle komponenter i et parallellsystem er like viktige ($I_{V-F}^{(i)}(t) = 1, i = 1, \dots, n$) uansett påliteligheten av den enkelte komponent
- ii) hvis i -te komponent feiler etter systemet, men før t , bidrar dette til målet
- iii) hvis i -te komponent er irrelevant, er $I_{V-F}^{(i)}(t) = P(X_i(t) = 0) = 1 - p_i(t)$ og ikke 0 som det burde.

En ytterligere innvending mot begge disse målene er at de er tidsavhengige. Dvs. at de begge sier noe om hvilke komponenter som er viktigst på et bestemt tidspunkt, men overlater f.eks. til analytikeren å bestemme hvilke tidspunkter som er viktige. Dette er ikke tilfellet for følgende mål foreslått av Barlow og Proschan (1975b):

Definisjon 3.4.5

Betrakt en monoton struktur ϕ av n komponenter som ikke repareres, der levetidene til

komponentene er absolutt kontinuert fordelt. (Dette siste medfører at levetidsfordelingene kan beskrives ved hjelp av sannsynlighetstettheter.) Barlow-Proschan målet for den pålitelighetsmessige betydning, $I_{B-P}^{(i)}$, av i -te komponent, er gitt ved

$$I_{B-P}^{(i)} = P[i\text{-te komponent forårsaker direkte at systemet feiler}] \quad i = 1, \dots, n$$

Med dette menes sannsynligheten for at i -te komponent feiler samtidig med systemet. Siden vi har antatt at levetidene til komponentene er absolutt kontinuert fordelt, er sannsynligheten lik 0 for at to eller flere komponenter feiler samtidig. Vi har følgende intuitive resultat.

Teorem 3.4.6

Betrakt en monoton struktur ϕ av n komponenter som ikke repareres, der tilstandsprossessene til komponentene $\{X_i(t), t \geq 0\}_{i=1}^n$ er uavhengige og $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Da er

$$P[\text{Systemet feiler i } [0, \infty)] = 1$$

Bevis:

Ved å bruke ii) i Definisjon 2.2.3 og Teorem 3.1.1, har vi

$$\begin{aligned} P[\text{Systemet feiler i } [0, \infty)] &= P[\phi(\underline{X}(\infty)) = 0] \\ &= 1 - h(\underline{p}(\infty)) \\ &= 1 - h(\underline{0}) = 1 - \phi(\underline{0}) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Ved beregning og bruk av Barlow-Proschan målet er følgende teorem nyttig.

Teorem 3.4.7

Betrakt en monoton struktur ϕ av n komponenter som ikke repareres, der tilstandsprossessene til komponentene $\{X_i(t), t \geq 0\}_{i=1}^n$ er uavhengige og deres levetider absolutt kontinuert fordelt med sannsynlighetstettheter $f_i(t)$ $i = 1, \dots, n$. Da er:

$$\begin{aligned} I_{B-P}^{(i)} &= \int_0^{\infty} I_B^{(i)}(t) f_i(t) dt \\ 0 &\leq I_{B-P}^{(i)} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n I_{B-P}^{(i)} = 1 \end{aligned}$$

Bevis:

Fra definisjonen av Barlow-Proschan målet og Teorem 3.4.2 følger at

$$\begin{aligned} I_{B-P}^{(i)} &= P[i\text{-te komponent forårsaker direkte at systemet feiler}] \\ &= \int_0^{\infty} P[(1_i, \underline{X}(t)) \text{ er en kritisk stivektor for } i\text{-te komponent}] f_i(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} I_B^{(i)}(t) f_i(t) dt. \end{aligned}$$

At $0 \leq I_{B-P}^{(i)} \leq 1$ følger trivielt av Definisjon 3.4.5. Endelig har vi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n I_{B-P}^{(i)} &= \sum_{i=1}^n P[i\text{-te komponent feiler samtidig med systemet}] \\ &= P\left[\bigcup_{i=1}^n \{i\text{-te komponent feiler samtidig med systemet}\}\right] \\ &= P[\text{Systemet feiler i } [0, \infty)] = 1, \end{aligned}$$

ved bruk av Teorem 3.4.6.

Av Teorem 3.4.7 følger at $I_{B-P}^{(i)}$ er et veiet gjennomsnitt av $I_B^{(i)}(t)$ med $f_i(t)$ som vekt. Tidspunkter der $f_i(t)$ er stor er derfor viktige ifølge dette målet. Svakheten ved Barlow-Proschan målet er at bare komponenter med lang levetid i forhold til systemets levetid, vil ha stor pålitelighetsmessig betydning. Intuitivt synes det rimeligere at komponenter som sterkt reduserer systemets gjenværende levetid ved at de feiler, er viktigst. Dette leder til følgende mål foreslått av Natvig (1979):

Definisjon 3.4.8

Betrakt en monoton struktur ϕ av n komponenter som ikke repareres og la:

$Z_i =$ reduksjon i gjenværende levetid for systemet pga. at i -te komponent feiler .

Natvig målet for den pålitelighetsmessige betydning, $I_N^{(i)}$, av i -te komponent, er gitt ved

$$I_N^{(i)} = EZ_i / \sum_{j=1}^n EZ_j,$$

der EZ_i antas endelig.

Vi har opplagt

$$0 \leq I_N^{(i)} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n I_N^{(i)} = 1$$

For å forstå skikkelig hva Z_i representerer, innføres følgende tilfeldige variable hentet fra Natvig (1982):

$Y_i^1 =$ gjenværende levetid for systemet akkurat etter at i -te komponent har feilet; denne blir imidlertid umiddelbart reparert til å ha den samme fordeling for den gjenværende levetid som den hadde rett før den feilet (dette kalles minimal reparasjon)

$Y_i^0 =$ gjenværende levetid for systemet akkurat etter at i -te komponent har feilet

Vi har da følgende fortolkning:

$$Z_i = Y_i^1 - Y_i^0 \tag{3.4.7}$$

EZ_i kan kanskje best fortolkes som reduksjon i forventet gjenværende levetid pga. at i -te komponent feiler.

La nå:

$S =$ levetid til et nytt system

$S_i =$ levetid til et nytt system der levetidsfordelingen til i -te komponent erstattes med en tilsvarende en, der nøyaktig en minimal reparasjon av komponenten er tillatt

$T_i =$ levetid til i -te komponent (frem til minimal reparasjon)

Forskjellen på S og S_i er at overlevelsessannsynligheten for i -te komponent til tidspunkt t er $\bar{F}_i(t)$ for S mens den for S_i er:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i(t) &+ \int_0^t f_i(t-u)P(T_i > t|T_i > t-u)du \\ &= \bar{F}_i(t) + \int_0^t f_i(t-u)\bar{F}_i(t)/\bar{F}_i(t-u)du \\ &= \bar{F}_i(t)[1 + [\ln \bar{F}_i(t-u)]_0^t] = \bar{F}_i(t)(1 - \ln \bar{F}_i(t)), \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

under forutsetning av at T_i er absolutt kontinuerlig fordelt. Vi ha nå følgende interessante sammenheng:

Teorem 3.4.9

Betrakt en monoton struktur ϕ av n komponenter som ikke repareres. Da er

$$Z_i = S_i - S$$

Bevis:

Vi betrakter to tilfeller

i) $T_i \leq S$. Da er fra (3.4.7)

$$Z_i = T_i + Y_i^1 - (T_i + Y_i^0) = S_i - S$$

ii) $T_i > S$. Da er igjen fra (3.4.7)

$$Z_i = Y_i^1 - Y_i^0 = 0 - 0 = 0 = S_i - S$$

Følgelig har vi alltid

$$Z_i = S_i - S$$

Følgende overraskende sammenheng ble vist i Natvig (1985).

Teorem 3.4.10

Betrakt en monoton struktur ϕ av n komponenter som ikke repareres, der tilstandspresessene til komponentene $\{X_i(t), t \geq 0\}_{i=1}^n$ er uavhengige og deres levetider absolutt kontinuerlig fordelt. Da er

$$EZ_i = \int_0^\infty \bar{F}_i(t)(-\ln \bar{F}_i(t))I_B^{(i)}(t)dt$$

Bevis:

La X være en tilfeldig variabel som er absolutt kontinuerlig fordelt over den ikke-negative tallinje. Fra Feller (1971, s. 150) har vi følgende svært nyttige formel

$$EX = \int_0^{\infty} P(X > x) dx$$

Fra Teorem 3.4.9 og (3.4.8) har vi da:

$$\begin{aligned} EZ_i &= ES_i - ES = \int_0^{\infty} [P(S_i > t) - P(S > t)] dt \\ &= \int_0^{\infty} [h([\bar{F}_i(t)(1 - \ln \bar{F}_i(t))]_i, \underline{\bar{F}}(t)) - h(\underline{\bar{F}}(t))] dt \end{aligned}$$

der $\underline{\bar{F}}(t) = (\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$.

Vi foretar så en pivot dekomposisjon med hensyn på i -te komponent og får videre:

$$\begin{aligned} EZ_i &= \int_0^{\infty} \{ \bar{F}_i(t)(1 - \ln \bar{F}_i(t))h(1_i, \underline{\bar{F}}(t)) \\ &\quad + [1 - \bar{F}_i(t)(1 - \ln \bar{F}_i(t))]h(0_i, \underline{\bar{F}}(t)) \\ &\quad - \bar{F}_i(t)h(1_i, \underline{\bar{F}}(t)) - (1 - \bar{F}_i(t))h(0_i, \underline{\bar{F}}(t)) \} dt \\ &= \int_0^{\infty} \bar{F}_i(t)(-\ln \bar{F}_i(t))[h(1_i, \underline{\bar{F}}(t)) - h(0_i, \underline{\bar{F}}(t))] dt \\ &= \int_0^{\infty} \bar{F}_i(t)(-\ln \bar{F}_i(t))I_B^{(i)}(t) dt \end{aligned}$$

etter å ha brukt Teorem 3.4.2.

Av Teorem 3.4.10 følger at også EZ_i er et veiet gjennomsnitt av $I_B^{(i)}(t)$ med $\bar{F}_i(t)(-\ln \bar{F}_i(t))$ som vekt. Ifølge (3.4.8) er dette den forbedring vi får av overlevelsessannsynligheten for i -te komponent til tidspunkt t ved å tillate nøyaktig en minimal reparasjon av den. Tidspunkter der denne forbedring er stor er derfor viktige ifølge Natvig målet. I Natvig (1985) er en mer detaljert sammenligning med Barlow-Proschan målet og andre mål som fremkommer ved å ta veiete gjennomsnitt av Birnbaum målet, foretatt. Denne sammenligning indikerer en rekke fordelaktige trekk ved Natvig målet. En skal likevel være klar over at intet mål kan forventes å være universelt best uansett bruksområde. En innvending mot alle målene i dette avsnittet er da også at de ikke tar hensyn til kostnadene ved å forbedre de ulike komponentene.

Øvelser

3.4.1 Beregn $I_B^{(i)}(t)$ for komponentene i brostrukturen i Eks. 3.1.3.

3.4.2 Anta at $i \in A$ der (A, χ) er en modul i det monotone systemet (C, ϕ) av uavhengige komponenter. Vis at

$$I_B^{(i)}(t) = I_B^{(i, \chi)}(t) \cdot I_B^{(\chi, \phi)}(t),$$

der $I_B^{(i, \chi)}(t)$ er Birnbaum målet for i -te komponent i strukturen (A, χ) og $I_B^{(\chi, \phi)}(t)$ er Birnbaum målet for modulen (A, χ) i strukturen (C, ϕ) .

3.4.3 Vis ved å bruke Bayes formel (Teorem 4.1.2) at for uavhengige komponenter har vi:

$$I_{V-F}^{(i)}(t) = [1 - h(0_i, \underline{p}(t))](1 - p_i(t))/[1 - h(\underline{p}(t))]$$

Bruk dette til å beregne $I_{V-F}^{(i)}(t)$ for komponentene i brostrukturen i Eks. 3.1.3.

3.4.4 Anta at levetidene for komponentene har såkalte proporsjonale hasarder, dvs.

$$\bar{F}_i(t) = \exp(-\lambda_i R(t)) \quad \lambda_i > 0, t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Vis at vi for en *seriestruktur* har:

$$I_{B-P}^{(i)} = I_N^{(i)} = \lambda_i / \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

Kommenter resultatet.

3.4.5 La S være levetiden til et nytt system av uavhengige komponenter

a) Vis at

$$ES = \int_0^\infty \bar{F}_i(t) I_B^{(i)}(t) dt + \int_0^\infty h(0_i, \bar{F}(t)) dt$$

b) Innfør

$$V_i(x) = \int_0^\infty \bar{F}_i(t-x) I_B^{(i)}(t) dt + \int_0^\infty h(0_i, \bar{F}(t)) dt$$

Hva gir $V_i(x) - ES$ et uttrykk for? Vis at:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{V_i(x) - ES}{x} = I_{B-P}^{(i)}$$

3.4.6 Anta at i -te komponent er irrelevant for strukturen ϕ . Hva blir da

$$I_B^{(i)}(t), I_{V-F}^{(i)}(t), I_{B-P}^{(i)} \text{ og } I_N^{(i)} ?$$

Begrunn svarene og kommenter dem.

3.5 Assosierte tilfeldige variable

Allerede i Avsnitt 1.2 tok vi opp problemet med mangel på kunnskap om avhengighetene mellom komponentene. Eksempler på slik avhengighet er:

- (i) Minimale stiseriestrukturer til et monotont system, med felles komponenter. Feiler en komponent, feiler også alle de minimale stiseriestrukturene der komponenten inngår.
- (ii) Komponenter som er utsatt for felles ytre stress.
- (iii) Strukturer der flere komponenter deler på en felles belastning. Feiler en komponent, øker belastningen på de øvrige komponenter.

Vi skal komme frem til en definisjon av ikke-negativ avhengighet, kalt assosiasjon, som synes fornuftig i pålitelighetsanalyse. En definisjon kunne være:

De tilfeldige variable S og T er assosierte hvis $Cov(S, T) \geq 0$.

En strengere definisjon er:

De tilfeldige variable S og T er assosierte hvis $Cov(f(S), g(T)) \geq 0$ for alle ikke-avtagende funksjoner f og g .

En enda strengere definisjon er:

De tilfeldige variable S og T er assosierte hvis $Cov(f(S, T), g(S, T)) \geq 0$ for alle funksjoner f og g som er ikke-avtagende i hvert argument.

Vi er imidlertid interessert i å definere assosiasjon for et vilkårlig antall tilfeldige variable. Dette leder til følgende kryptiske definisjon gitt av Esary, Proschan & Walkup (1967).

Definisjon 3.5.1

De tilfeldige variable T_1, \dots, T_n , som ikke nødvendigvis er binære, er *assosierte* hvis

$$Cov(\Gamma(\underline{T}), \Delta(\underline{T})) \geq 0, \quad \underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$$

for alle binære funksjoner Γ og Δ som er ikke-avtagende i hvert argument.

For $n=2$ svarer dette til den strengeste definisjonen over bortsett fra at en begrenser seg til at Γ og Δ er binære. Følgende teorem som bevises på hovedfagsnivå, viser imidlertid at denne begrensningen ikke medfører tap av generalitet.

Teorem 3.5.2

La T_1, \dots, T_n være assosierte tilfeldige variable, og f og g funksjoner som er ikke-avtagende i hvert argument slik at $Cov(f(\underline{T}), g(\underline{T}))$ eksisterer, dvs. at

$$E|f(\underline{T})| < \infty, \quad E|g(\underline{T})| < \infty, \quad E|f(\underline{T})g(\underline{T})| < \infty.$$

Da er:

$$\text{Cov}(f(\underline{T}), g(\underline{T})) \geq 0$$

Selv om definisjonen av assosierte tilfeldige variable er kryptisk, eller kanskje nettopp derfor, har slike variable svært pene egenskaper.

Teorem 3.5.3

Assosierte tilfeldige variable har følgende egenskaper:

- P_1 : Enhver delmengde av assosierte tilfeldige variable består selv av assosierte tilfeldige variable
- P_2 : En enkelt tilfeldig variabel er alltid assosiert
- P_3 : Ikke-avtagende funksjoner av assosierte tilfeldige variable er assosierte
- P_4 : Hvis to mengder av assosierte tilfeldige variable er uavhengige av hverandre, er deres union en mengde av assosierte tilfeldige variable.

Bevis:

Bevis av P_3 og P_4 gjøres på hovedfagsnivå. P_1 følger av P_3 , men kan også bevises direkte. La $\{T_1, \dots, T_n\}$ være mengden av assosierte tilfeldige variable og la $A \subset \{1, \dots, n\}$. Vi ønsker å vise at $\{T_i\}_{i \in A}$ er en mengde av assosierte tilfeldige variable. Velger da vilkårlige, binære funksjoner Γ_A og Δ_A som er ikke-avtagende i hvert av argumentene $T_i, i \in A$. Definer nå:

$$\Gamma_1(\underline{T}) = \Gamma_A(\underline{T}^A), \Delta_1(\underline{T}) = \Delta_A(\underline{T}^A).$$

Dermed har vi:

$$\text{Cov}(\Gamma_A(\underline{T}^A), \Delta_A(\underline{T}^A)) = \text{Cov}(\Gamma_1(\underline{T}), \Delta_1(\underline{T})) \geq 0.$$

Ulikheten følger av Definisjon 3.5.1 siden T_1, \dots, T_n er antatt assosierte. Dermed er P_1 bevist.

For å bevise P_2 la T være en tilfeldig variabel, og la Γ og Δ være vilkårlige, binære funksjoner som er ikke-avtagende i T . Det fins nå bare følgende alternativer. Enten er $\Gamma(T) \leq \Delta(T)$ for alle verdier av T , eller så er $\Gamma(T) \geq \Delta(T)$ for alle verdier av T . Uten tap av generalitet kan vi anta det første. Vi har da:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Gamma(T), \Delta(T)) &= E\Gamma(T)\Delta(T) - E\Gamma(T)E\Delta(T) \\ &= E\Gamma(T) - E\Gamma(T)E\Delta(T) = E\Gamma(T)(1 - E\Delta(T)) \geq 0 \end{aligned}$$

Dermed er P_2 bevist.

Følgende teorem er både viktig og nyttig.

Teorem 3.5.4

La T_1, \dots, T_n være uavhengige tilfeldige variable. Da er de også assosierte.

Bevis:

Beviset gjennomføres som et induksjonsbevis. Teoremet holder opplagt for $n = 1$ pga. egenskap P_2 . Anta teoremet holder for $n = m - 1$. Hvis vi kan vise at det holder for $n = m$, er vi fremme. Vi har nå at $\{T_1, \dots, T_{m-1}\}$ er en mengde av assosierte tilfeldige variable og fra P_2 at også $\{T_m\}$ er en mengde av assosierte tilfeldige variable. Pga. antagelsen i teoremet er disse mengdene uavhengige av hverandre. Fra P_4 følger dermed at $\{T_1, \dots, T_m\}$ er en mengde av assosierte tilfeldige variable, og vi er fremme.

Det motsatte ytterpunkt til Teorem 3.5.4 er følgende teorem.

Teorem 3.5.5

La T_1, \dots, T_n være fullstendig positivt avhengige tilfeldige variable, dvs.

$$P(T_1 = T_2 = \dots = T_n) = 1.$$

Da er de også assosierte.

Bevis:

La Γ og Δ være vilkårlige, binære funksjoner som er ikke-avtagende i hvert argument og la $\underline{T}_1 = (T_1, \dots, T_1)$. Da er

$$Cov(\Gamma(\underline{T}), \Delta(\underline{T})) = Cov(\Gamma(\underline{T}_1), \Delta(\underline{T}_1)) \geq 0,$$

etter å ha brukt P_2 . Dermed er vi fremme.

Teoremene 3.5.4 og 3.5.5 må for all del ikke lede oss til å benytte “spansk” interpolasjon og feilaktig slutte at alle ikke-negativt avhengige tilfeldige variable er assosierte.

La oss vende tilbake til eksemplet i) ved begynnelsen av dette avsnittet. La X_1, \dots, X_n være de assosierte, f.eks. uavhengige, komponenttilstandene, til et monotont system med minimale stiseriestrukturer

$$\rho_j(\underline{X}^{P_j}) = \prod_{i \in P_j} X_i \quad j = 1, \dots, p$$

Det følger da umiddelbart av P_3 at disse minimale stiseriestrukturene er assosierte. Tilsvarende innsees at minimale kuttparallelstrukturer av assosierte komponenttilstander selv er assosierte. Disse egenskapene brukes i neste avsnitt for å etablere grenser for systempåliteligheten. Følgende teorem er også nyttig og supplerer egenskap P_3 .

Teorem 3.5.6

La T_1, \dots, T_n være assosierte tilfeldige variable og la

$$U_i = g_i(\underline{T}), \quad i = 1, \dots, m,$$

der $g_i, i = 1, \dots, m$ er ikke-voksende funksjoner. Da er U_1, \dots, U_m assosierte.

Bevis:

La Γ og Δ være vilkårlige, binære funksjoner som er ikke-avtagende i U_i , $i = 1, \dots, m$.
Innfør

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(\underline{T}) &= 1 - \Gamma(\underline{g}(\underline{T})) = 1 - \Gamma(\underline{U}) \\ \tilde{\Delta}(\underline{T}) &= 1 - \Delta(\underline{g}(\underline{T})) = 1 - \Delta(\underline{U}),\end{aligned}$$

der

$$\underline{U} = \underline{g}(\underline{T}) = (g_1(\underline{T}), \dots, g_m(\underline{T})).$$

Det følger nå umiddelbart at $\tilde{\Gamma}$ og $\tilde{\Delta}$ er binære og ikke-avtagende i T_i , $i = 1, \dots, n$.
Dermed har vi siden T_1, \dots, T_n er assosierte at:

$$\begin{aligned}Cov(\Gamma(\underline{U}), \Delta(\underline{U})) &= Cov(1 - \tilde{\Gamma}(\underline{T}), 1 - \tilde{\Delta}(\underline{T})) \\ &= Cov(\tilde{\Gamma}(\underline{T}), \tilde{\Delta}(\underline{T})) \geq 0,\end{aligned}$$

og vi er fremme.

Følgende teorem bevises på hovedfagsnivå, men trengs i neste avsnitt.

Teorem 3.5.7

La S og T være assosierte tilfeldige variable slik at $Cov(S, T)$ eksisterer. Vi har da at $Cov(S, T) = 0$ hviss S og T er uavhengige.

Legg merke til at den samme ekvivalens holder hvis S og T er binormalt fordelt. Implikasjonen fra uavhengighet til ukorrelerthet gjelder selvfølgelig alltid.

Til nå har vi presentert en til dels nydelig matematisk teori for assosierte tilfeldige variable. Men ved anvendelser har vi behov for å kunne sjekke at tilfeldige variable virkelig er assosierte. Da er Definisjon 3.5.1 fullstendig ubrukbar. Følgende teorem er en svært mager trøst.

Teorem 3.5.8

La X og Y være to binære tilfeldige variable. Da har vi at $Cov(X, Y) \geq 0$ hviss X og Y er assosierte.

Bevis:

Implikasjonen fra assosiasjon til ikke-negativ korrelasjon følger umiddelbart av Definisjon 3.5.1. Anta nå at $Cov(X, Y) \geq 0$. Alle mulige binære funksjoner Γ som er ikke-avtagende i de binære argumentene X og Y , er faktisk ordnet i det følgende:

$$(\Gamma \equiv 0) \leq (\Gamma = X \cdot Y) \leq \left\{ \begin{array}{l} \Gamma = X \\ \Gamma = Y \end{array} \right\} \leq (\Gamma = X \amalg Y) \leq (\Gamma \equiv 1)$$

Anta vi har valgt $\Gamma(X, Y)$ og $\Delta(X, Y)$ blant de nevnte mulighetene slik at $\Gamma(X, Y) \leq \Delta(X, Y)$. Da er:

$$\begin{aligned}Cov(\Gamma(X, Y), \Delta(X, Y)) &= E\Gamma(X, Y)\Delta(X, Y) - E\Gamma(X, Y)E\Delta(X, Y) \\ &= E\Gamma(X, Y) - E\Gamma(X, Y)E\Delta(X, Y) = E\Gamma(X, Y)(1 - E\Delta(X, Y)) \geq 0.\end{aligned}$$

Den eneste muligheten som gjenstår, er at

$$\Gamma(X, Y) = X, \quad \Delta(X, Y) = Y.$$

Da er

$$\text{Cov}(\Gamma(X, Y), \Delta(X, Y)) = \text{Cov}(X, Y) \geq 0,$$

pr. antagelse og vi er fremme.

Teoremet er utmerket hvis vi har *to binære* tilfeldige variable. Ved anvendelser har vi selvsagt i det minste langt flere tilfeldige variable. Vi ser også av beviset at teoremet ikke lett lar seg generalisere til en slik situasjon. Hva gjør vi da? Vi skal avslutte dette avsnittet med å gi en tilstrekkelig betingelse for at tilfeldige variable er assosierte, men trenger først to definisjoner.

Definisjon 3.5.9

En tilfeldig variabel T er *stokastisk ikke-avtagende* i de tilfeldige variable S_1, \dots, S_k hvis

$$P(T > t | S_1 = s_1, S_2 = s_2, \dots, S_k = s_k)$$

er ikke-avtagende i hver av s_1, \dots, s_k for alle t .

Definisjon 3.5.10

De tilfeldige variable T_1, \dots, T_n , der $n \geq 2$, er *betinget ikke-avtagende i følge* hvis T_i er stokastisk ikke-avtagende i T_1, \dots, T_{i-1} for $i = 2, \dots, n$.

Teorem 3.5.11

Hvis T_1, \dots, T_n er betinget ikke-avtagende i følge, er de også assosierte.

Bevis er gitt i Barlow og Proschan (1975a). Denne tilstrekkelige betingelsen har vist seg nyttig.

3.6 Øvre og nedre grenser for systempåliteligheten til monotone systemer

Som omtalt tidligere må vi ofte nøye oss med å beregne øvre og nedre grenser for systempåliteligheten. Det følgende teorem gir et nøkkelresultat for å etablere slike grenser.

Teorem 3.6.1

La T_1, \dots, T_n være assosierte tilfeldige variable slik at $0 \leq T_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$. Da er:

$$E \prod_{i=1}^n T_i \geq \prod_{i=1}^n ET_i \tag{3.6.1}$$

$$E \prod_{i=1}^n T_i \leq \prod_{i=1}^n ET_i \tag{3.6.2}$$

Bevis:

Ved bruk av Teorem 3.5.2 har vi:

$$E \prod_{i=1}^n T_i - ET_1 \cdot E \prod_{i=2}^n T_i = Cov(T_1, \prod_{i=2}^n T_i) \geq 0$$

Dette gir

$$E \prod_{i=1}^n T_i \geq ET_1 \cdot E \prod_{i=2}^n T_i.$$

Ved å benytte tilsvarende ulikhet suksessivt på høyre side over fremkommer (3.6.1). Bemerk at siden vi har antatt $0 \leq T_i$, $i = 1, \dots, n$, er ingen faktorer negative, slik at alle ulikheter går riktig vei. Ifølge Teorem 3.5.6 er $1 - T_1, \dots, 1 - T_n$ assosierte tilfeldige variable. Ved å benytte (3.6.1) på disse variablene fremkommer

$$\begin{aligned} E \prod_{i=1}^n T_i &= 1 - E \prod_{i=1}^n (1 - T_i) \leq 1 - \prod_{i=1}^n E(1 - T_i) = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - ET_i) = \prod_{i=1}^n ET_i, \end{aligned}$$

og vi har bevist (3.6.2). Siden vi har antatt $0 \leq 1 - T_i$, $i = 1, \dots, n$, er også her ingen faktorer negative.

Teoremet er også i seg selv et av de mest sentrale i pålitelighetsteorien med konsekvenser langt utenfor rammen av sin rent matematiske formulering. Ved å benytte teoremet på de binære komponenttilstander X_1, \dots, X_n sier (3.6.1) at for en seriestruktur av assosierte komponenter vil en feilaktig antagelse om uavhengighet lede til en *underestimering* av systempåliteligheten. (3.6.2) sier at for en parallellstruktur vil en tilsvarende antagelse lede til *overestimering* av systempåliteligheten. *Hovedpoenget er at for en vilkårlig struktur vil konsekvensen av en feilaktig antagelse om uavhengighet kunne være umulig å anslå.* I Natvig (1987) benyttes nettopp dette teoremet til å påvise hvor overflatisk og til dels misvisende Kjernekraftutvalget beskrev det særdeles kompliserte problem som avhengighet mellom tilfeldige variable representerer, ved beregning av sannsynligheter for reaktoruhell.

La oss nå tolke T_i , $i = 1, \dots, n$ som levetidene til komponentene i et system. Da har vi:

Teorem 3.6.2

La T_1, \dots, T_n være assosierte tilfeldige variable. Da er for alle t_i , $i = 1, \dots, n$:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n (T_i > t_i)\right] \geq \prod_{i=1}^n P(T_i > t_i) \quad (3.6.3)$$

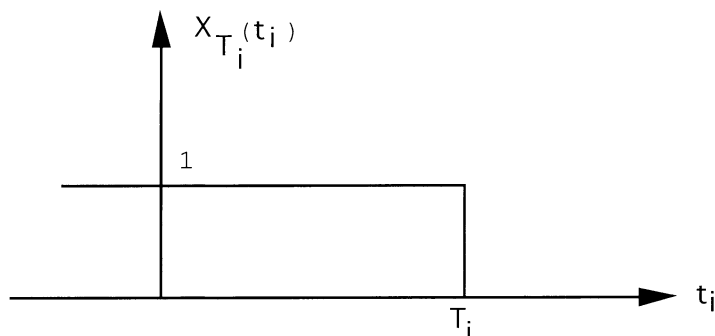
$$P\left[\bigcap_{i=1}^n (T_i \leq t_i)\right] \geq \prod_{i=1}^n P(T_i \leq t_i) \quad (3.6.4)$$

Bevis:

Innfør de binære komponenttilstandene på tidspunkt t_i ($i = 1, \dots, n$):

$$X_{T_i}(t_i) = \begin{cases} 1 & t_i < T_i \\ 0 & t_i \geq T_i, \end{cases}$$

illustrert i Figur 3.6.1.



Figur 3.6.1

Da er $X_{T_i}(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ binære ikke-avtagende funksjoner av T_1, \dots, T_n og ifølge P_3 assosierte. Dermed får vi ved å bruke (3.6.1):

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{i=1}^n (T_i > t_i)\right] &= P\left[\bigcap_{i=1}^n (X_{T_i}(t_i) = 1)\right] \\ &= P\left[\prod_{i=1}^n X_{T_i}(t_i) = 1\right] = E \prod_{i=1}^n X_{T_i}(t_i) \\ &\geq \prod_{i=1}^n EX_{T_i}(t_i) = \prod_{i=1}^n P(X_{T_i}(t_i) = 1) = \prod_{i=1}^n P(T_i > t_i), \end{aligned}$$

og (3.6.3) er bevist. (3.6.4) bevises analogt ved å bruke (3.6.2).

Legg merke til at venstre siden i (3.6.4) gir simultanfordelingen til T_1, \dots, T_n mens høyre siden gir den samme simultanfordelingen under antagelse om uavhengighet. Som et korollar til Teorem 3.6.2 får vi:

Korollar 3.6.3

La T_1, \dots, T_n være assosierte tilfeldige variable. Da gjelder:

$$P\left(\min_{1 \leq i \leq n} T_i > t\right) \geq \prod_{i=1}^n P(T_i > t) \quad (3.6.5)$$

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} T_i > t\right) \leq \prod_{i=1}^n P(T_i > t) \quad (3.6.6)$$

Dette er i realiteten ikke noe annet enn Teorem 3.6.1 anvendt på de binære komponenttilstandene på tidspunkt t , idet $\min_{1 \leq i \leq n} T_i$ er levetiden til et seriesystem og $\max_{1 \leq i \leq n} T_i$ er levetiden til et parallellsystem.

Svært grove grenser for systempåliteligheten til monotone systemer er gitt i det følgende teorem.

Teorem 3.6.4

La X_1, \dots, X_n være de assosierte komponenttilstander til en monoton struktur ϕ med komponentpåliteligheter p_1, \dots, p_n . Da er:

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq h \leq \prod_{i=1}^n p_i \quad (3.6.7)$$

Bevis:

Ved å benytte (3.6.1), Teorem 2.2.6 samt (3.6.2) har vi:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n p_i &= \prod_{i=1}^n EX_i \leq E \prod_{i=1}^n X_i \leq E\phi(\underline{X}) \\ &\leq E \prod_{i=1}^n X_i \leq \prod_{i=1}^n EX_i = \prod_{i=1}^n p_i, \end{aligned}$$

og vi er fremme.

Legg merke til at den nedre (øvre) grensen er påliteligheten til et seriesystem (parallellsystem) av uavhengige komponenter. Heldigvis kan vi etablere grenser som alltid er bedre. Disse fremkommer som et korollar til følgende teorem.

Teorem 3.6.5

Betrakt en monoton struktur ϕ med minimale stimengder (kuttmengder) $P_1, \dots, P_p(K_1, \dots, K_k)$. Da er:

$$\max_{1 \leq j \leq p} P[\min_{i \in P_j} X_i = 1] \leq h \leq \min_{1 \leq j \leq k} P[\max_{i \in K_j} X_i = 1] \quad (3.6.8)$$

Bevis:

Fra (2.3.1) og (2.3.2) har vi:

$$\min_{i \in P_r} X_i \leq \max_{1 \leq r \leq p} \min_{i \in P_r} X_i = \phi(\underline{X}) = \min_{1 \leq s \leq k} \max_{i \in K_s} X_i \leq \max_{i \in K_s} X_i,$$

for alle $r = 1, \dots, p$ og alle $s = 1, \dots, k$.

Dette medfører at

$$P(\min_{i \in P_r} X_i = 1) \leq h \leq P(\max_{i \in K_s} X_i = 1)$$

for alle $r = 1, \dots, p$ og alle $s = 1, \dots, k$. Herav følger (3.6.8).

Legg merke til at vi ikke gjør noen antagelser i det hele tatt om avhengigheten mellom komponenttilstandene i dette teoremet. Prisen vi må betale er at grensene i (3.6.8) er ubrukelige for anvendelser. Derimot har vi følgende eksplisitte grenser.

Korollar 3.6.6

Gjør de samme antagelser som i Teorem 3.6.5, men anta i tillegg at komponenttilstandene er assosierte med komponentpåliteligheter p_1, \dots, p_n . Da er:

$$\max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in P_j} p_i \leq h \leq \min_{1 \leq j \leq k} \prod_{i \in K_j} p_i \quad (3.6.9)$$

Bevis:

(3.6.9) følger umiddelbart av (3.6.8) ved å bruke (3.6.1) og (3.6.2) siden

$$\prod_{i \in P_j} p_i \leq E \prod_{i \in P_j} X_i = P[\min_{i \in P_j} X_i = 1]$$

og

$$\prod_{i \in K_j} p_i \geq E \prod_{i \in K_j} X_i = P[\max_{i \in K_j} X_i = 1].$$

Teorem 3.6.4 og Korollar 3.6.6 baserer seg på de samme antagelsene. At de nedre grensene i (3.6.9) er vesentlig bedre enn dem i (3.6.7) ser en av følgende:

$$\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i \in P_j} p_i \prod_{i \notin P_j} p_i \leq \prod_{i \in P_j} p_i \leq \max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in P_j} p_i$$

Tilsvarende resonnement gjelder for de øvre grensene.

For tilfellet med uavhengige komponenttilstander kan vi etablere grenser som i noen tilfeller er bedre og i andre dårligere enn dem i (3.6.9). Disse fremkommer som et korollar til følgende teorem.

Teorem 3.6.7

La X_1, \dots, X_n være de assosierte komponenttilstander til en monoton struktur ϕ med minimale stiseriestrukturer (kuttparallelstrukturer) $\rho_1(\underline{X}^{P_1}), \dots, \rho_p(\underline{X}^{P_p})$ ($\kappa_1(\underline{X}^{K_1}), \dots, \kappa_k(\underline{X}^{K_k})$). Da er:

$$\prod_{j=1}^k P(\kappa_j(\underline{X}^{K_j}) = 1) \leq h \leq \prod_{j=1}^p P(\rho_j(\underline{X}^{P_j}) = 1) \quad (3.6.10)$$

Bevis:

Som nevnt i Avsnitt 3.5 følger det av P_3 at de minimale stiseriestrukturene og også de minimale kuttparallelstrukturerne er assosierte. Fra (3.6.1), (2.3.2) og (2.3.1), (3.6.2) har vi da:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k P(\kappa_j(\underline{X}^{K_j}) = 1) &\leq E \prod_{j=1}^k \kappa_j(\underline{X}^{K_j}) = h \\ &= E \prod_{j=1}^p \rho_j(\underline{X}^{P_j}) \leq \prod_{j=1}^p P(\rho_j(\underline{X}^{P_j}) = 1), \end{aligned}$$

og (3.6.10) er vist.

Til tross for antagelsen om assosierte komponenttilstander er grensene i (3.6.10) ubrukelige for anvendelser. Følgende grenser derimot er eksplisitte.

Korollar 3.6.8

La ϕ være en monoton struktur av uavhengige komponenttilstander og komponentpåliteligheter p_1, \dots, p_n . Betegn de minimale stimengder (kuttmengder) med $P_1, \dots, P_p(K_1, \dots, K_k)$. Da er:

$$\prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} p_i \leq h(\underline{p}) \leq \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} p_i \quad (3.6.11)$$

Bevis:

Den nedre grensen i (3.6.11) er for uavhengige komponenttilstander lik den nedre grensen i (3.6.10) siden

$$P(\kappa_j(\underline{X}^{K_j}) = 1) = E \prod_{i \in K_j} X_i = \prod_{i \in K_j} p_i$$

Tilsvarende gjelder for den øvre grensen.

Eks. 3.6.1 3-av-4 system med $p_i = p$, $i = 1, 2, 3, 4$

La oss beregne og sammenligne grensene i (3.6.9) og (3.6.11) for dette systemet. De minimale stimengdene for et 3-av-4 system er

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\},$$

mens de minimale kuttmengdene er

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

(3.6.9) reduserer seg da til

$$\ell_1(p) = p^3 \leq h \leq 2p - p^2 = u_1(p),$$

mens (3.6.11) blir

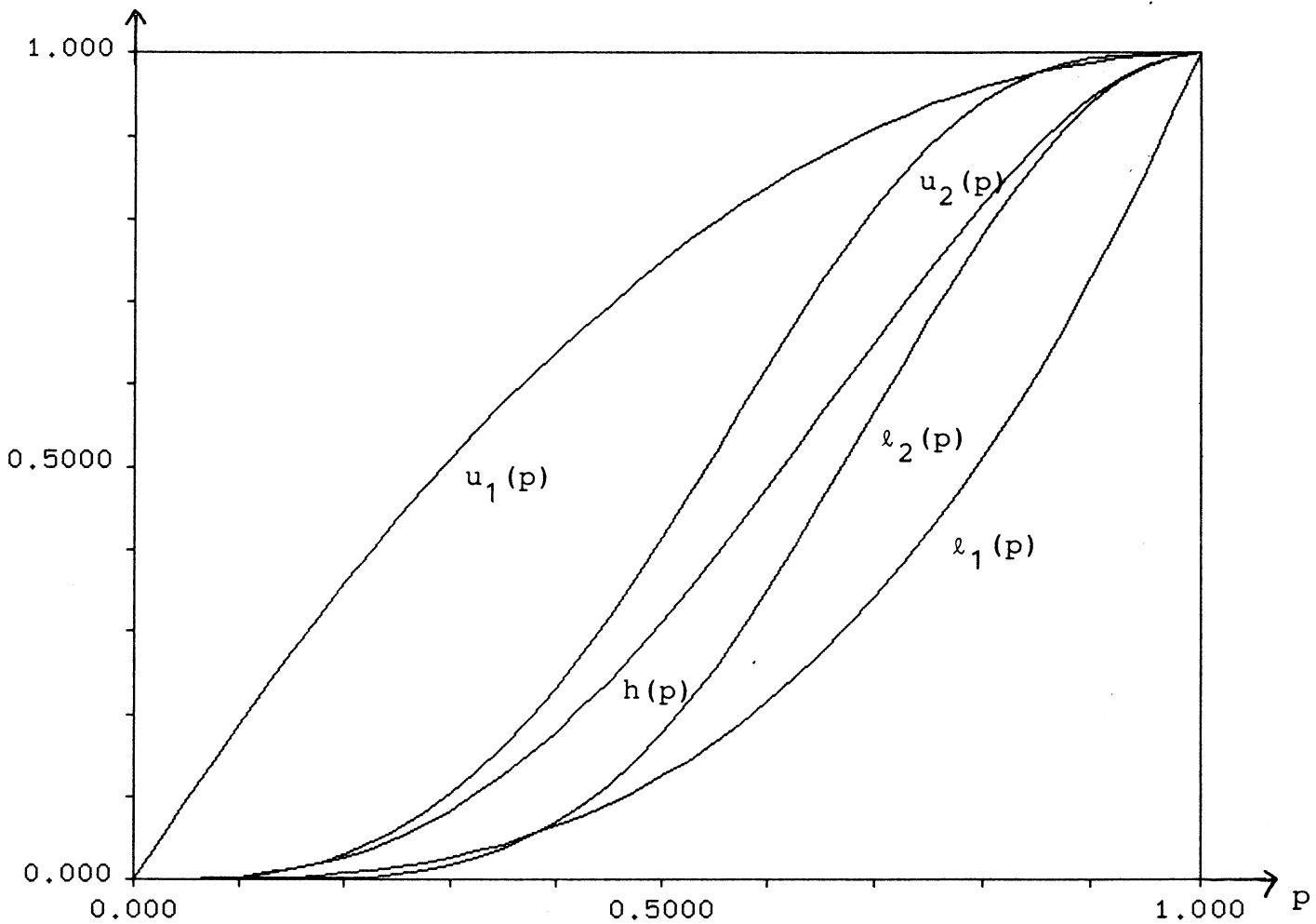
$$\ell_2(p) = (2p - p^2)^6 \leq h(p) \leq 2(2p^3 - p^6) - (2p^3 - p^6)^2 = u_2(p)$$

Disse grensene er fremstilt i Figur 3.6.2 sammen med

$$h(p) = 4p^3(1 - p) + p^4,$$

beregnet fra formelen i Eks. 3.1.4.

I dette eksemplet er grensene gitt i (3.6.11) klart bedre enn dem i (3.6.9). Det som likevel er verdt å merke seg er at den nedre grensen fra (3.6.9) er best av de to for små p -verdier, mens den nedre grensen fra (3.6.11) er best for store p -verdier. Tilsvarende er den øvre grensen fra (3.6.9) best av de to for store p -verdier, mens den øvre grensen fra (3.6.11) er best for små p -verdier.



Figur 3.6.2

Disse siste resultatene i dette eksemplet holder mer generelt. Dette er vist i Maymin (1987). Moralen vi kan trekke av dette er følgende teorem som gir de best mulige grenser for tilfellet med uavhengige komponenttilstander.

Teorem 3.6.9

La X_1, \dots, X_n være de uavhengige komponenttilstander til en monoton struktur ϕ med komponentpåliteligheter p_1, \dots, p_n og pålitelighetsfunksjon $h_\phi(\underline{p})$. Betegn de minimale stimengder (kuttmengder) med $P_1, \dots, P_p(K_1, \dots, K_k)$ og la

$$L_\phi(\underline{p}) = \max\left[\prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} p_i, \max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in P_j} p_i\right]$$

$$U_\phi(\underline{p}) = \min\left[\prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} p_i, \min_{1 \leq j \leq k} \prod_{i \in K_j} p_i\right].$$

Da er

$$L_\phi(\underline{p}) \leq h_\phi(\underline{p}) \leq U_\phi(\underline{p}). \tag{3.6.12}$$

Bevis:

(3.6.12) følger umiddelbart av (3.6.9) og (3.6.11).

Legg merke til at vi virkelig trenger teorien for assosierte tilfeldige variable for å etablere (3.6.12) siden den trengs for å etablere (3.6.11). Ytterligere informasjon om grensene i (3.6.12) er gitt i følgende teorem.

Teorem 3.6.10

Gjør de samme antagelser som i Teorem 3.6.9. Da er:

- i) $L_\phi(\underline{p})$ og $U_\phi(\underline{p})$ ikke-avtagende funksjoner i hvert argument
- ii) $L_\phi(\underline{p}) < h_\phi(\underline{p}) < U_\phi(\underline{p}) \quad 0 < p_i < 1, i = 1, \dots, n$
 hvis strukturen har minst to minimale kuttmengder som overlapper og minst to minimale stimengder som overlapper.

Bevis:

i) følger umiddelbart av uttrykkene for $L_\phi(\underline{p})$ og $U_\phi(\underline{p})$. Anta nå at de to kuttmengdene som overlapper hverandre er K_1 og K_2 . Siden vi har antatt at $0 < p_i < 1, i = 1, \dots, n$, vil ingen av de tilfeldige variablene

$$\kappa_1(\underline{X}^{K_1}), \quad \prod_{j=2}^k \kappa_j(\underline{X}^{K_j})$$

være identisk lik 0 eller 1. Pga. overlappingen blir de to tilfeldige variablene dermed avhengige og de er dessuten assosierte ifølge P_3 . Fra Teorem 3.5.7 har vi da at:

$$Cov\left(\kappa_1(\underline{X}^{K_1}), \prod_{j=2}^k \kappa_j(\underline{X}^{K_j})\right) > 0$$

Dette gir ved også å bruke (3.6.1) at

$$\begin{aligned} h_\phi(\underline{p}) &= E \prod_{j=1}^k \kappa_j(\underline{X}^{K_j}) > E\kappa_1(\underline{X}^{K_1}) E \prod_{j=2}^k \kappa_j(\underline{X}^{K_j}) \\ &\geq \prod_{j=1}^k E\kappa_j(\underline{X}^{K_j}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} p_i \end{aligned}$$

Ved å ta utgangspunkt i to minimale stimengder som overlapper, vises tilsvarende at

$$h_\phi(\underline{p}) < \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} p_i$$

La nå $\rho_r(\underline{X}^{P_r})$ være den mest pålitelige minimale stiseriestrukturen. Siden ϕ har minst en minimal stimengde i tillegg til P_r , må P_r^c inneholde minst en relevant komponent. Dermed følger det av beviset for Teorem 3.1.3, siden $0 < p_i < 1, i = 1, \dots, n$, at:

$$\begin{aligned} h_\phi(\underline{p}) &= h_\phi(\underline{p}^{P_r^c}, \underline{p}^{P_r}) > h_\phi(\underline{0}^{P_r^c}, \underline{p}^{P_r}) \\ &= \prod_{i \in P_r} p_i = \max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in P_j} p_i \end{aligned}$$

Tilsvarende vises at

$$h_\phi(\underline{p}) < \min_{1 \leq j \leq k} \prod_{i \in K_j} p_i$$

Som nevnt i slutten av Kapittel 2 kan en oppnå forbedrete grenser for systempåliteligheten ved å innføre en passende modulær dekomposisjon. Fra Natvig (1980) har vi hentet følgende teorem som forbedrer grensene i Teorem 3.6.9.

Teorem 3.6.11

La (C, ϕ) være et monotont system av uavhengige komponenttilstander med modulær dekomposisjon $\{(A_i, \chi_i)\}_{i=1}^r$ og monoton organisasjonsstruktur ψ . Da er:

$$\begin{aligned} L_\phi(\underline{p}) &\leq L_\psi[L_{\chi_1}(\underline{p}^{A_1}), \dots, L_{\chi_r}(\underline{p}^{A_r})] \\ &\left\{ \begin{array}{l} \leq L_\psi[h_{\chi_1}(\underline{p}^{A_1}), \dots, h_{\chi_r}(\underline{p}^{A_r})] \leq \frac{4}{5} \\ \leq h_\psi[L_{\chi_1}(\underline{p}^{A_1}), \dots, L_{\chi_r}(\underline{p}^{A_r})] \leq \end{array} \right\} h_\phi \\ &\left\{ \begin{array}{l} \leq U_\psi[h_{\chi_1}(\underline{p}^{A_1}), \dots, h_{\chi_r}(\underline{p}^{A_r})] \leq \frac{8}{9} \\ \leq h_\psi[U_{\chi_1}(\underline{p}^{A_1}), \dots, U_{\chi_r}(\underline{p}^{A_r})] \leq \end{array} \right\} \\ &U_\psi[U_{\chi_1}(\underline{p}^{A_1}), \dots, U_{\chi_r}(\underline{p}^{A_r})] \leq U_\phi(\underline{p}) \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Bevis:

Siden komponenttilstandene er uavhengige, blir også modulstandene uavhengige. Da modulene videre kan betraktes som “kjempekomponenter” i strukturen ψ med tilhørende påliteligheter $h_{\chi_i}(\underline{p}^{A_i})$, $i = 1, \dots, r$, har vi:

$$h_\phi(\underline{p}) = h_\psi[h_{\chi_1}(\underline{p}^{A_1}), \dots, h_{\chi_r}(\underline{p}^{A_r})]$$

Nå er h_ψ ikke-avtagende i hvert argument. Dermed følger ulikhetene 5 og 7 ved å anvende Teorem 3.6.9 på modulnivå. Tilsvarende følger ulikhetene 4 og 6 ved å anvende Teorem 3.6.9 på organisasjonsstrukturen ψ . Fra Teorem 3.6.10 har vi at L_ψ og U_ψ er ikke-avtagende i hvert argument. Dermed følger ulikhetene 2 og 8 ved å anvende Teorem 3.6.9 på modulnivå. Tilsvarende følger ulikhetene 3 og 9 ved å anvende Teorem 3.6.9 på organisasjonsstrukturen ψ . De to resterende ulikhetene 1 og 10 vil det føre for langt å bevise her. Det er dog ikke så vanskelig å vise at ulikhet 10 fremkommer ved å anvende ulikhet 1 på (C, ϕ^D) som har modulær dekomposisjon $\{(A_i, \chi_i^D)\}_{i=1}^r$ og organisasjonsstruktur ψ^D .

Dette teoremet brukes ved anvendelser på følgende måte. Anta vi har et system som er satt sammen av separate undersystemer, som f.eks. er levert av ulike leverandører. Disse undersystemene er igjen satt sammen av komponenter, som endelig igjen er satt sammen av deler. Anta vi har gitt delenes påliteligheter utfra tilgjengelige data. Fra Teorem 3.6.9 oppnås nå nedre og øvre grenser for komponentenes påliteligheter. Ved

gjentatt bruk av Teorem 3.6.9 oppnås nå videre av disse grensene nedre og øvre grenser for undersystemenes påliteligheter. Endelig brukes Teorem 3.6.9 til å oppnå nedre og øvre grenser for systempåliteligheten av grensene for undersystemenes påliteligheter. Teorem 3.6.11 sier nå at denne fremgangsmåten gir bedre grenser enn å bruke Teorem 3.6.9 direkte på delenes påliteligheter.

La oss avslutte dette kapitlet med å referere noe av det en ser nærmere på i Natvig (1980). Teorem 3.6.11 forutsetter at komponenttilstandene er uavhengige. Et tilsvarende teorem, men med mindre eksplisitte grenser, forutsetter bare at modulene er såkalt “totalt” uavhengige. Rent bevisteknisk fremkommer videre alle øvre grenser ved å anvende de nedre grenser på den duale struktur. Teorem 3.6.11 sier ikke noe klart om hvor “finmasket” vi skal velge den modulære dekomposisjon. Grovt sagt kan det vises at det er fordelaktig å foreta en ytterligere modulær dekomposisjon av de moduler en ikke kjenner pålitelighetsfunksjonen til, men å la de øvrige moduler være i fred.

Teorem 3.6.11 betrakter i realiteten bare påliteligheten til komponenter og system på et bestemt tidspunkt hvis reparasjon er aktuelt. Se derfor på følgende definisjon.

Definisjon 3.6.12

For det monotone system (C, ϕ) defineres *tilgjengeligheten*, $h_\phi^{(I)}$, og *utilgjengeligheten*, $g_\phi^{(I)}$, i tidsintervallet $I = [t_1, t_2]$ ved

$$\begin{aligned} h_\phi^{(I)} &= P[\phi(\underline{X}(s)) = 1 \quad \text{for alle } s \in I] \\ g_\phi^{(I)} &= P[\phi(\underline{X}(s)) = 0 \quad \text{for alle } s \in I], \end{aligned}$$

idet vi antar at komponentene og dermed også systemet har en viss reparasjonstid.

Legg merke til at vi har

$$h_\phi^{(I)} + g_\phi^{(I)} \leq 1,$$

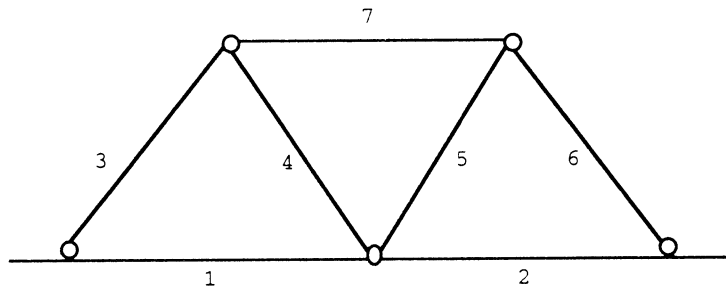
med likhet for $I = [t, t]$. I Natvig (1980) generaliseres grensene i Teorem 3.6.9 til å gjelde for $h_\phi^{(I)}$ og $g_\phi^{(I)}$. Også forbedrete grenser etableres ved bruk av modulær dekomposisjon. Denne teorien er i Funnemark og Natvig (1985) generalisert til det multinære tilfellet, der en beskriver tilstandene til komponenter og system mer nyansert enn som bare funksjonerende eller ei. Slike grenser gir oss muligheten til å se hvordan systemtilstanden veksler i tid og gir f.eks. et godt grunnlag for å vurdere systemets reparasjonstid. En anvendelse av denne multinære teorien på et kraftforsyningssystem til to nærliggende oljerigger er gitt i Natvig, Sørmo, Holen og Høgåsen (1986).

Øvelser

3.6.1 Bevis (3.6.4) i Teorem 3.6.2.

3.6.2 Bevis den øvre grensen i (3.6.9) i Korollar 3.6.6 ved å anvende den nedre grensen på den duale struktur ϕ^D .

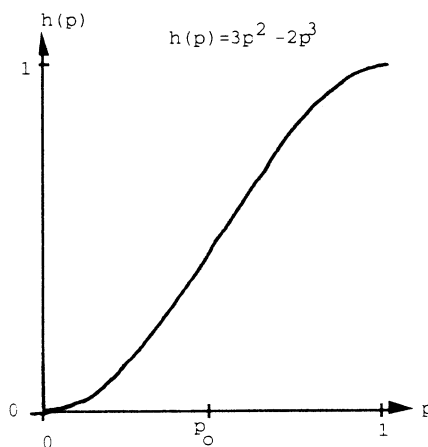
- 3.6.3 Bevis den øvre grensen i (3.6.11) i Korollar 3.6.8 ved å anvende den nedre grensen på den duale struktur ϕ^D .
- 3.6.4 Bevis den øvre grensen i (3.6.12) i Teorem 3.6.9 ved å anvende den nedre grensen på den duale struktur ϕ^D .
- 3.6.5 Bevis ulikhet 10 i (3.6.13) i Teorem 3.6.11 ved å anvende ulikhet 1 på den duale struktur ϕ^D .
- 3.6.6 Betrakt nettverket i Figur 3.6.3 av uavhengige komponenttilstander hver med komponentpålitelighet p . Beregn $h(p)$ samt grensene i (3.6.12) i Teorem 3.6.9. Skriv et datamaskinprogram som beregner disse funksjonene, og bruk for eksempel BLSS til å plote dem.



Figur 3.6.3

3.7 S-form teoremet

I dette avsnittet skal vi diskutere formen på pålitelighetsfunksjonen. Spesielt skal vi formulere og bevise S-form teoremet fra Barlow og Proschan (1975a). S-form teoremet er viktig fordi det beskriver forløpet til pålitelighetsfunksjonen under generelle strukturelle antagelser. Navnet S-form er laget for å antyde et typisk forløp for pålitelighetsfunksjonen, se Figur 3.7.1.



Figur 3.7.1

Beviset av resultatet er nært knyttet til en interessant ulikhet (3.7.3). Når det gjelder strukturen ϕ , skal vi bare forutsette at følgende størrelser er kjent:

$$\begin{aligned} c(\phi) &= \text{antall kuttmengder med en komponent} \\ n(\phi) &= \text{antall stimengder med en komponent.} \end{aligned}$$

Teorem 3.7.1. (S-form teoremet)

La ϕ være en monoton struktur med minst to relevante komponenter som ikke er i serie. Anta videre at komponentene er uavhengige og identisk fordelte. Da gjelder følgende

- i) Hvis $c(\phi) = n(\phi) = 0$, dvs. at ingen komponent er koblet i serie eller i parallell med resten av systemet, så finnes en $p_0 \in (0, 1)$ slik at $h(p_0) = p_0$
- ii) Hvis $h(p_0) = p_0$, så er $h(p) < p$ for $0 < p < p_0$, mens $h(p) > p$ for $p_0 < p < 1$

Kommentarer

- i) Anta, i motsetning til punkt i), at $c(\phi) > 0$. La $\{i\}$ være en kuttmengde. Ved pivotdekomposisjon blir

$$\begin{aligned} h(p) &= ph(1_i, p) + (1 - p)h(0_i, p) \\ &= ph(1_i, p) < p, \quad 0 < p < 1 \end{aligned}$$

Den siste strenge ulikheten skyldes at strukturfunksjonen $\phi(1_i, \underline{x})$ har minst en relevant komponent. Tilsvarende vises at $h(p) > p$ for $0 < p < 1$ hvis $n(\phi) > 0$. Merk til slutt at hvis $c(\phi) > 0$ og $n(\phi) > 0$, så må systemet være det trivielle bestående av en komponent.

- ii) Beviset for punkt ii) avviker fra det tradisjonelle, gjengitt for eksempel i Barlow og Proschan (1975a). Vi skal følge Egeland (1992) som igjen bruker noen resultater som skyldes Ross (1972). Beviset går via flere hjelperesultater.

Vi minner om at en funksjon som er to ganger deriverbar, er (strengt) konkav hvis $(f''(x) < 0)f''(x) \leq 0$. Dette medfører spesielt at

$$f(u_1 + \delta) - f(u_1) \geq f(u_2 + \delta) - f(u_2). \tag{3.7.1}$$

Her er $0 \leq u_1 \leq u_2$ og $\delta \geq 0$.

Lemma 3.7.1

- i) Hvis $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ og $0 \leq x \leq y$, så er

$$\lambda^\alpha y^\alpha + (1 - \lambda^\alpha)x^\alpha - [\lambda y + (1 - \lambda)x]^\alpha \geq 0.$$

- ii) Hvis $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$ og $0 < x < y$, så er

$$\lambda^\alpha y^\alpha + (1 - \lambda^\alpha)x^\alpha - [\lambda y + (1 - \lambda)x]^\alpha > 0.$$

Bevis:

De to punktene vises på samme måte og vi nøyer oss derfor med det første her. Funksjonen $f(x) = x^\alpha$ har ikke-positiv dobbeltderivert i $x \geq 0$ og er derfor konkav. La nå i (3.7.1) $\delta = \lambda(y - x)$, $x \leq y$, $u_1 = \lambda x$ og $u_2 = x$. Da blir

$$\lambda^\alpha y^\alpha - \lambda^\alpha x^\alpha \geq [\lambda y + (1 - \lambda)x]^\alpha - x^\alpha,$$

som forenkler seg til konklusjonen i første del av lemmaet. Det neste lemmaet har en viss egeninteresse og vi formulerer det mer generelt enn det er behov for her i det vi betrakter tilfellet med ikke-identiske komponenter.

Lemma 3.7.2

i) La $h(\underline{p})$ være pålitelighetsfunksjonen til et monotont system. Da er

$$h(\underline{p}^\alpha) \geq h^\alpha(\underline{p}) \quad \text{for } 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.7.2)$$

hvor $\underline{p}^\alpha = (p_1^\alpha, \dots, p_n^\alpha)$.

ii) La $h(\underline{p})$ være pålitelighetsfunksjonen til et monotont system med minst to relevante komponenter som ikke er i serie. Da er

$$h(\underline{p}^\alpha) > h^\alpha(\underline{p}) \quad \text{for } 0 < \alpha < 1, 0 < p_i < 1, i = 1, \dots, n. \quad (3.7.3)$$

Bevis:

Beviset av (3.7.2) er ved induksjon på antall komponenter i systemet, n . La $n = 1$. Da er $h(\underline{p}) = 0$, $h(\underline{p}) = p$ eller $h(\underline{p}) = 1$. I alle tilfeller holder (3.7.2). Anta at (3.7.2) holder for $n = k$. For $k + 1$ får vi da ved pivotdekomposisjon

$$h(\underline{p}^\alpha) = p_{k+1}^\alpha h(1_{k+1}, \underline{p}^\alpha) + (1 - p_{k+1}^\alpha) h(0_{k+1}, \underline{p}^\alpha)$$

Ved induksjonsantagelsen blir

$$h(\underline{p}^\alpha) \geq p_{k+1}^\alpha h(1_{k+1}, \underline{p})^\alpha + (1 - p_{k+1}^\alpha) h(0_{k+1}, \underline{p})^\alpha$$

Ved å bruke Lemma 3.7.1 i), med $\lambda = p_{k+1}$, $y = h(1_{k+1}, \underline{p})$ og $x = h(0_{k+1}, \underline{p})$, får vi

$$\begin{aligned} p_{k+1}^\alpha h(1_{k+1}, \underline{p})^\alpha + (1 - p_{k+1}^\alpha) h(0_{k+1}, \underline{p})^\alpha \\ \geq [p_{k+1} h(1_{k+1}, \underline{p}) + (1 - p_{k+1}) h(0_{k+1}, \underline{p})]^\alpha = h(\underline{p})^\alpha \end{aligned}$$

Den siste likheten følger ved pivotdekomposisjon. Ved induksjonsprinsippet er dermed (3.7.2) vist.

Ved pivotdekomposisjon og foregående punkt blir

$$\begin{aligned} h(\underline{p}^\alpha) &= p_e^\alpha h(1_e, \underline{p}^\alpha) + (1 - p_e^\alpha) h(0_e, \underline{p}^\alpha) \\ &\geq p_e^\alpha h(1_e, \underline{p})^\alpha + (1 - p_e^\alpha) h(0_e, \underline{p})^\alpha \end{aligned}$$

Den strukturelle antagelsen sikrer at komponent e kan velges slik at $h(1_e, \underline{p}) > h(0_e, \underline{p}) > 0$ for $0 < p_i < 1$, $i \neq e$. La $\lambda = p_e$, $y = h(1_e, \underline{p})$ og $x = h(0_e, \underline{p})$. Forutsetningene for punkt ii) i Lemma 3.7.1 er tilstede slik at

$$\begin{aligned} p_e^\alpha h^\alpha(1_e, \underline{p}) + (1 - p_e^\alpha) h^\alpha(0_e, \underline{p}) \\ > [p_e h(1_e, \underline{p}) + (1 - p_e) h(0_e, \underline{p})]^\alpha = h^\alpha(\underline{p}). \end{aligned}$$

Dermed er det vist at

$$h(\underline{p}^\alpha) > h(\underline{p})^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < p_i < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Etter alt dette kan vi vise S-form teoremet:

Bevis av Teorem 3.7.1 i):

Av identiteten $\frac{\partial h}{\partial p_i} = h(1_i, \underline{p}) - h(0_i, \underline{p})$ og kjederegelen for derivasjon følger

$$\frac{d}{dp} h(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial p} = \sum_{i=1}^n \{h(1_i, p) - h(0_i, p)\}$$

Følgelig får vi fra Teorem 3.1.1:

$$\left. \frac{d}{dp} h(p) \right|_{p=0} = \sum_{i=1}^n \{h(1_i, 0) - h(0_i, 0)\} = \sum_{i=1}^n \phi(1_i, 0) = n(\phi)$$

Tilsvarende vises at

$$\left. \frac{d}{dp} h(p) \right|_{p=1} = c(\phi)$$

Mellomverdisetningen gir at

$$h(p) = h(0) + ph'(\xi) = ph'(\xi),$$

for en passende $\xi \in (0, p)$. Hvis $n(\phi) = 0$, så er $h'(0) = 0$. Dermed blir $h(p) < p$ bare p er nær nok 0 pga. kontinuiteten til $h(p)$ og $h'(p)$. Tilsvarende vises at $h(p) > p$ for p tilstrekkelig nær 1 hvis $c(\phi) = 0$. Ved skjæringssetningen anvendt på differansen $h(p) - p$ følger eksistensen av en $p_0 \in (0, 1)$ slik at $h(p_0) = p_0$.

Bevis av Teorem 3.7.1 ii):

La $h(p_0) = p_0$ og velg en $p > p_0$. Da finnes en $\alpha \in (0, 1)$ slik at $p_0^\alpha = p$ og ved Lemma 3.7.2 ii) blir

$$h(p) = h(p_0^\alpha) > h^\alpha(p_0) = p_0^\alpha = p$$

Den omvendte ulikheten vises tilsvarende. La $0 < p < p_0$. Da er $p^\alpha = p_0$ for en $\alpha \in (0, 1)$ og

$$p^\alpha = p_0 = h(p_0) = h(p^\alpha) > h^\alpha(p),$$

slik at $p > h(p)$ for $0 < p < p_0$. Beviset er med dette ferdig.

La oss se hvordan dette kan brukes ved analyse av reléstrukturer. Innfør

$$\begin{aligned} p &= P \text{ (et relé lukker seg når det skal lukke seg)} \\ p^D &= P \text{ (et relé åpner seg når det skal åpne seg)} \end{aligned}$$

Betrakt nå et system av identiske reléer med strukturfunksjoner ϕ og ϕ^D svarende henholdsvis til lukking og åpning på kommando. La de tilhørende pålitelighetsfunksjoner være $h_\phi(p)$ og $h_{\phi^D}(p^D)$.

Vi ønsker at både $h_\phi(p)$ og $h_{\phi^D}(p^D)$ er store. Anta at $h_\phi(p)$ har S-form. Da vil for det første at p er stor, medføre at $h_{\phi^D}(p^D)$ er stor. Men siden

$$h_{\phi^D}(p^D) = 1 - h_\phi(1 - p^D),$$

vil også at p^D er stor, medføre at $h_\phi(1 - p^D)$ er liten og dermed også at $h_{\phi^D}(p^D)$ er stor. Vi slår derfor to fluer i en smekk. Pga. S-formen oppnåes også bedre egenskaper for systemene av reléer enn for enkeltreléene. Dette er utdypet i Øvelse 3.7.3.

Øvelser

3.7.1

- La ϕ være et 2-av-3 system med pålitelighetsfunksjon $h_2(p)$. Vis at $h_2(1/2) = 1/2$.
- La mer generelt ϕ_m være et m -av- $2m - 1$ system der $m \geq 2$. Bestem p_m slik at $h_m(p_m) = p_m$.
- La ϕ være en generell struktur med $2m - 1$ komponenter. Anta at den korteste stimengden har m komponenter og at $h(p_0) = p_0$. Forklar hvorfor

$$p_0 \geq p_m,$$

der p_m er som i foregående punkt.

3.7.2

- La $\alpha \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ og $0 \leq x \leq y$. Vis at da er

$$\lambda^\alpha y^\alpha + (1 - \lambda^\alpha)x^\alpha - [\lambda y + (1 - \lambda)x]^\alpha \leq 0.$$

- La $h(\underline{p})$ være pålitelighetsfunksjonen til et monotont system. Vis at

$$h(\underline{p}^\alpha) \leq h^\alpha(\underline{p}) \quad \text{hvis } \alpha \geq 1$$

3.7.3 La ϕ være en struktur uten stimengder eller kuttmengder av lengde 1. La $h(p) = h_1(p)$ være den tilhørende pålitelighetsfunksjon. Sett

$$h_n(p) = h(h_{n-1}(p)) \quad \text{for } n = 2, 3, \dots$$

a) Anta at ϕ er en 2-av-3 struktur. Tegn systemet som har $h_2(p)$ som pålitelighetsfunksjon.

b) Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(p) = \begin{cases} 0 & \text{for } p < p_0 \\ p_0 & \text{for } p = p_0 \\ 1 & \text{for } p > p_0 \end{cases}$$

Forklar hvordan man kan lage vilkårlig gode (dårlige) systemer.

Kapittel 4

Bayesianske metoder i pålitelighetsanalyse

Som tatt opp i Kapittel 1 vil en i pålitelighetsanalyse pga. manglende data være helt avhengig av å kunne utnytte skjønn og erfaringer fra ingeniører om de teknologiske komponenter, og fra psykologer og sosiologer om de menneskelige komponenter. Dette gjør at det er helt naturlig å basere seg på en såkalt Bayesiansk metodelære som utnytter subjektive sannsynligheter på en måte som er fullstendig konsistent med reglene fra sannsynlighetsregningen. Resultatene i første del av dette kapitlet er hentet fra Barlow og Proschan (1985), mens siste del gir noen hovedresultater fra Natvig og Eide (1987).

4.1 Bayes formel og Bayes teorem

Disse resultatene fra sannsynlighetsregningen danner fundamentet for den Bayesianske metodelære, og vi starter med å bevise dem. Først trenger vi en definisjon.

Definisjon 4.1.1

Bevgenhetene A_1, \dots, A_r sies å være en *oppdeling av utfallsrommet* S dersom

- (i) $A_j \subset S, \quad j = 1, \dots, r$
- (ii) $\bigcup_{j=1}^r A_j = S$
- (iii) $A_j \cap A_k = \emptyset, \quad j \neq k$
- (iv) $P(A_j) > 0, \quad j = 1, \dots, r$

Teorem 4.1.2 (Bayes formel)

La A_1, \dots, A_r være en oppdeling av S og la B være en vilkårlig hendelse i S . Da er:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^r P(B|A_k)P(A_k)}, \quad j = 1, \dots, r$$

Bevis:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j \cap B)}{\sum_{k=1}^r P(A_k \cap B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^r P(B|A_k)P(A_k)}$$

For absolutt kontinuerlige tilfeldige variable får vi følgende variant av Bayes formel.

Teorem 4.1.3 (Bayes Teorem)

La X og $\tilde{\theta}$ være tilfeldige variable med simultantetthet $p(x, \theta)$. La videre $p(x|\theta)$ og $p(\theta|x)$ betegne de tilhørende betingete sannsynlighetstettheter og $\pi(\theta)$ marginaltettheten til $\tilde{\theta}$. For $\theta \in \Theta$ har vi:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} p(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

Bevis:

Idémessig er beviset identisk med det for Teorem 4.1.2. Vi har idet $p(x)$ betegner marginaltettheten til X :

$$p(\theta|x) = \frac{p(x, \theta)}{p(x)} = \frac{p(x, \theta)}{\int_{\Theta} p(x, \theta)d\theta} = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} p(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

Legg merke til at X og $\tilde{\theta}$ gjerne kan være vektorer.

Bayesianerne, dvs. tilhengerne av den Bayesianske metodelære, synger ved festlige anledninger "There is no theorem like Bayes' Theorem". Måten dette teoremet brukes på i Bayesiansk statistikk er som følger. Vi har en ukjent parameter $\theta \in \Theta$, der Θ er parameterrommet. Parameteren θ er en *fast* størrelse, men den er *ukjent* for statistikeren. Vi kaller den en *tilfeldig størrelse*. Den opprinnelige usikkerhet statistikeren har om hvor θ måtte befinne seg, uttrykkes ved en *à priori* sannsynlighetstetthet $\pi_0(\theta)$. Statistikeren skaffer seg så data, D , for å bedre sin informasjon om θ . La nå f.eks. $D = (x_1, \dots, x_n)$ og betegn simultantettheten for (x_1, \dots, x_n) gitt θ med $f(x_1, \dots, x_n|\theta)$. Hvis vi betrakter denne som funksjon av θ , kalles den *rimelighetsfunksjonen* for θ gitt dataene. Generelt betegnes denne med $L(\theta|D)$. Etter at dataene er samlet inn, oppdaterer statistikeren sin usikkerhet om hvor θ måtte befinne seg. Denne uttrykkes ved en *à posteriori* sannsynlighetstetthet $\pi(\theta|D)$. Hemmeligheten er nå at Bayes' teorem er skreddersydd for denne oppdateringen og gir umiddelbart:

$$\pi(\theta|D) = \frac{L(\theta|D)\pi_0(\theta)}{\int_{\Theta} L(\theta|D)\pi_0(\theta)d\theta} = kL(\theta|D)\pi_0(\theta) \tag{4.1.1}$$

Her er k bare en normeringskonstant som sikrer at

$$\int_{\Theta} kL(\theta|D)\pi_0(\theta)d\theta = 1$$

À posteriori sannsynlighetstettheten for θ finnes derfor ved bare å multiplisere à priori tettheten for θ med rimelighetsfunksjonen for θ gitt dataene og så normere.

4.2 Å posteriori tettheten i en eksponensiell modell

For å konkretisere teorien i forrige avsnitt betrakt følgende anvendelse. Vi har $n = 100$ metallstrenger som utsettes for en høy statisk belastning. Dette er et eksempel på en *akselerert levetidstesting* der en utsetter forsøksenhetene for belastninger langt utover det normale for å få en passende lengde av forsøksperioden. På grunnlag av dataene fra forsøket med høy belastning, og modellantagelser om koblingen mellom forsøksenhetenes levetider under høy og normal belastning, ønsker en å si noe om enhetenes levetider under normal belastning.

Innfør nå følgende tilfeldige variable:

$$X_i = \text{Levetid for } i\text{-te metallstreng, } i = 1, \dots, n$$

Gitt feilintensiteten λ , antas nå X_1, \dots, X_n å være uavhengige, identisk eksponensielt fordelte med feilintensitet λ . Betegn dataene fra forsøket med $D_1 = (x_1, \dots, x_n)$. Rime-lighetsfunksjonen for λ gitt D_1 er da:

$$L(\lambda|D_1) = \prod_{i=1}^n \lambda \exp(-\lambda x_i) = \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i) \quad (4.2.1)$$

λ betraktes her som fast, men ukjent for statistikeren. Vi har da en *subjektivistisk* Bayes metode. Hvis λ er en tilfeldig variabel som beskriver “fysisk variasjon” fra metallstreng til metallstreng, har vi en *empirisk* Bayes metode. Det er noe ganske annet.

Anta nå at vi i en viss forstand er uten informasjon om λ før forsøket settes igang. Vi velger derfor à priori sannsynlighetstettheten $\pi_0(\lambda)$ utfra en uniform modell:

$$\pi_0(\lambda) = \begin{cases} M^{-1} & 0 \leq \lambda \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Her er M svært stor, f.eks. lik 10^{12} . Fra (4.1.1) har vi da

$$\begin{aligned} \pi(\lambda|D_1) &= \frac{M^{-1} \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i)}{\int_0^M M^{-1} \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i) d\lambda} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^{n+1} \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i)}{\int_0^M (\sum_{i=1}^n x_i)^{n+1} \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i) d\lambda} \end{aligned}$$

Ved å substituere $y = (\sum_{i=1}^n x_i) \lambda$ i integralet i nevneren får vi videre:

$$= \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^{n+1} \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i)}{M \sum_{i=1}^n x_i \int_0^M y^n \exp(-y) dy}$$

Sannsynlighetsmaksimeringsestimatet (SME) for λ er den verdi av λ som maksimerer $L(\lambda|D_1)$ og er $\lambda^* = n / \sum_{i=1}^n x_i$. Vi har da:

$$M \sum_{i=1}^n x_i = Mn / \lambda^*$$

Definer gammafunksjonen ved:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

Ved delvis integrasjon følger det at:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

Hvis vi har valgt $M \gg \lambda^*$, har vi:

$$\int_0^{M \sum_{i=1}^n x_i} y^n \exp(-y) dy \approx \int_0^{\infty} y^n \exp(-y) dy = \Gamma(n + 1)$$

Dermed er følgende vist:

$$\pi(\lambda|D_1) \approx \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{n+1} \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i) / \Gamma(n + 1) \quad 0 \leq \lambda < \infty \quad (4.2.3)$$

Høyre side her er en gamma tetthet med *formparameter* $a = n + 1$ og *skalaparameter* $b = \sum_{i=1}^n x_i$. Denne siste størrelsen er forsøkets *totale testtid*.

Anta nå at vi utfører et nytt forsøk uavhengig av det første og ender opp med dataene $D_2 = (y_1, \dots, y_m)$. Vi benytter da høyre side av (4.2.3) som vår à priori sannsynlighetstetthet med parametrene a og b som gitt over. (4.1.1) gir nå følgende à posteriori sannsynlighetstetthet:

$$\pi(\lambda|D_2) = \frac{\lambda^m \exp(-\lambda \sum_{i=1}^m y_i) b^a \lambda^{a-1} \exp(-\lambda b) / \Gamma(a)}{\int_0^{\infty} \lambda^m \exp(-\lambda \sum_{i=1}^m y_i) b^a \lambda^{a-1} \exp(-\lambda b) / \Gamma(a) d\lambda}$$

Vi multipliserer nå med $(b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m}$ i teller og nevner og substituerer $y = (b + \sum_{i=1}^m y_i)\lambda$ i integralet i nevneren. Dette gir videre lik:

$$\begin{aligned} &= \frac{(b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m} \lambda^{a+m-1} \exp(-\lambda(b + \sum_{i=1}^m y_i))}{\int_0^{\infty} y^{a+m-1} \exp(-y) dy} \\ &= (b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m} \lambda^{a+m-1} \exp(-\lambda(b + \sum_{i=1}^m y_i)) / \Gamma(a + m) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Følgelig er à posteriori tettheten en gamma tetthet med formparameter $a + m = n + m + 1$ og skalaparameter $\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i$. Skalaparameteren kan fortsatt fortolkes som forsøkenes totale testtid.

Som vi har sett av utledningen av (4.2.4) vil en antagelse om en à priori gamma tetthet i vår eksponensielle modell lede til at også à posteriori tettheten er gamma. Gamma fordelingen sies derfor å være en *naturlig konjugert à priori fordeling* for feilintensiteten i den eksponensielle modell. Hvis vi for formparameteren a i en slik fordeling har at $a > 1$, kan $a - 1$ fortolkes som antall observasjoner i et tidligere forsøk og skalaparameteren b som den tilhørende totale testtid. Dette tidligere forsøket kan være reelt eller fiktivt. Denne fortolkning, samt matematiske bekvemlighetshensyn, er grunnen til at en ofte velger en naturlig konjugert à priori fordeling i den eksponensielle modell.

4.3 Litt Bayesianisk inferensteori

Det er viktig å legge merke til at utgangspunktet for en Bayesianisk inferensteori for en parameter θ nettopp er à posteriori tettheten for parameteren. La oss først se på punkt-estimering av θ på grunnlag av à posteriori tettheten $\pi(\theta|D)$. Anta vi benytter estimatet a , mens den korrekte verdien altså er θ . Tapet ved å ikke anslå θ korrekt måles ved *tapsfunksjonen* $L(a, \theta)$.

Definisjon 4.3.1

Bayesestimatet, $\hat{\theta}$, er den verdi av a som minimerer forventet à posteriori tap, dvs. oppfyller:

$$\begin{aligned} E[L(\hat{\theta}, \theta)|D] &= \inf_a E[L(a, \theta)|D] \\ &= \inf_a \int_{\Theta} L(a, \theta)\pi(\theta|D)d\theta \end{aligned}$$

Ofte velges en *kvadratisk* tapsfunksjon, dvs.

$$L(a, \theta) = (a - \theta)^2$$

Vi har da følgende teorem:

Teorem 4.3.2

Bayesestimatet, $\hat{\theta}$, for en parameter θ , når en benytter en kvadratisk tapsfunksjon, er forventningen i à posteriori fordelingen, dvs.

$$\hat{\theta} = E(\theta|D)$$

Bervis:

$$\begin{aligned} E[L(a, \theta)|D] &= E[(a - \theta)^2|D] \\ &= \int_{\Theta} (a - \theta)^2\pi(\theta|D)d\theta \end{aligned}$$

Vi deriverer nå dette uttrykket med hensyn på a , idet vi forutsetter at vi har lov til å derivere innenfor integraltegnet, og setter så den deriverte lik 0. Dette gir:

$$\int_{\Theta} 2(a - \theta)\pi(\theta|D)d\theta = 0,$$

som leder til:

$$a = \int_{\Theta} \theta\pi(\theta|D)d\theta = E(\theta|D)$$

Dermed er vi fremme.

La oss nå se på Bayesiansk intervallestimering.

Definisjon 4.3.3

Anta vi har en mengde $C \subset \Theta$ slik at

$$\int_C \pi(\theta|D)d\theta = 1 - \alpha.$$

Da kalles mengden en Bayes $100(1-\alpha)\%$ *troverdighetsmengde* for θ . Hvis C er et intervall, kaller vi det et *troverdighetsintervall*.

Et $100(1-\alpha)\%$ troverdighetsintervall for θ er følgelig et intervall der vi med sannsynlighet $1 - \alpha$ tror at θ befinner seg *etter at dataene D er samlet inn*.

Eks. 4.3.1

Anta for den eksponensielle modellen at à priori sannsynlighetstettheten for feilintensiteten λ er en gamma tetthet med formparameter a og skalaparameter b . Forsøket resulterer i at m enheter feiler etter en total testtid $\sum_{i=1}^m y_i$. À posteriori tettheten er da gitt ved (4.2.4). Hvis nå $\tilde{\Lambda}$ har denne sannsynlighetstettheten, følger det at

$$2(b + \sum_{i=1}^m y_i)\tilde{\Lambda} \sim \chi_{2[a+m]}^2,$$

der χ_{ν}^2 betegner en kjikvadratfordelt tilfeldig variabel med ν frihetsgrader. Dette gir, idet $\chi_{\alpha,\nu}^2$ betegner α fraktilen i χ_{ν}^2 fordelingen,

$$P\left[\frac{\chi_{\alpha/2,2[a+m]}^2}{2(b + \sum_{i=1}^m y_i)} \leq \tilde{\Lambda} \leq \frac{\chi_{1-\alpha/2,2[a+m]}^2}{2(b + \sum_{i=1}^m y_i)}\right] = 1 - \alpha$$

Følgelig er:

$$\left[\frac{\chi_{\alpha/2,2[a+m]}^2}{2(b + \sum_{i=1}^m y_i)}, \frac{\chi_{1-\alpha/2,2[a+m]}^2}{2(b + \sum_{i=1}^m y_i)}\right] \quad (4.3.1)$$

et $100(1 - \alpha)\%$ troverdighetsintervall for λ .

La oss sammenligne med et klassisk konfidensintervall idet vi lar:

$$Y_i = \text{Levetid for } i\text{-te metallstreng, } i = 1, \dots, m$$

Siden $2\lambda Y_i \sim \chi_2^2$, følger det at

$$2\lambda \sum_{i=1}^m Y_i \sim \chi_{2m}^2.$$

Dermed har vi at:

$$P\left[\frac{\chi_{\alpha/2, 2m}^2}{2 \sum_{i=1}^m Y_i} \leq \lambda \leq \frac{\chi_{1-\alpha/2, 2m}^2}{2 \sum_{i=1}^m Y_i}\right] = 1 - \alpha$$

Følgelig er:

$$\left[\frac{\chi_{\alpha/2, 2m}^2}{2 \sum_{i=1}^m Y_i}, \frac{\chi_{1-\alpha/2, 2m}^2}{2 \sum_{i=1}^m Y_i}\right]$$

en $100(1 - \alpha)\%$ intervallestimator for λ . Legg merke til at fortolkningen nå er denne. Det er en sannsynlighet på $1 - \alpha$, før forsøket utføres, for at intervallestimatorens (stokastiske) grenser omslutter den faste parameteren λ .

Anta nå at forsøket utføres og vi registrerer at $\sum_{i=1}^m Y_i = \sum_{i=1}^m y_i$. Vi får da følgende $100(1 - \alpha)\%$ intervallestimat for λ :

$$\left[\frac{\chi_{\alpha/2, 2m}^2}{2 \sum_{i=1}^m y_i}, \frac{\chi_{1-\alpha/2, 2m}^2}{2 \sum_{i=1}^m y_i}\right] \quad (4.3.2)$$

Hva sier dette intervallet om hvor parameteren λ måtte befinne seg? Svaret er: *ingenting!* Enten ligger parameteren i intervallet eller så gjør den det ikke. *Klassisk inferens beskriver ikke vår usikkerhet om parameteren etter at dataene D er samlet inn.* Populært sagt – vi kjenner sannsynligheten for å treffe blinken før vi skyter, men vi vet ingenting om hva som skjedde etter at skuddet er avfyrt.

Anta nå at en likevel ved anvendelser feilaktig fortolker (4.3.2) som et $100(1 - \alpha)\%$ troverdighetsintervall for λ . Ved å sammenligne (4.3.2) og (4.3.1) svarer dette *numerisk* til en Bayes metode med à priori “gammatetthet” for λ med parameter $a = b = 0$, dvs.

$$\pi_0(\lambda) = 1/\lambda, \quad \lambda \geq 0$$

Dette er en *ekte* à priori tetthet siden

$$\int_0^{\infty} \lambda^{-1} d\lambda = \infty.$$

Om vi ser bort fra dette siste, kan vi likevel slå fast at for de fleste anvendelser vil $\pi_0(\lambda)$ gitt over legge helt urealistiske store vekter på små verdier av λ . Hvis vi har mye data,

dvs. at en i (4.3.1) har $m \gg a$, $\sum_{i=1}^m y_i \gg b$, vil forskjellen på (4.3.1) og (4.3.2) være liten, og betydningen av à priori fordelingen være minimal.

Resultatet over gjelder faktisk ganske generelt. Har en mye data, vil en Bayes metode *numerisk* ofte lede til omtrent samme resultat som en velkjent klassisk metode. Har en lite data, vil forskjellen kunne være stor, og den klassiske metode vil implisitt ofte svare til en à priori informasjon som kan være helt urimelig.

Et alternativt punkttestimat for en parameter θ er modalverdien, $\tilde{\theta}$, i à posteriori tettheten $\pi(\theta|D)$, dvs. den verdi av θ som maksimerer $\pi(\theta|D)$. Sammenlign med sannsynlighetsmaksimeringsestimatet som maksimerer $L(\theta|D)$, mens modalverdien maksimerer $L(\theta|D)\pi_0(\theta)$. Det første estimatet fremkommer som et spesialtilfelle av det siste for konstant $\pi_0(\theta)$. Det siste estimatet er derfor mer naturlig og har en klarere begrunnelse.

Eks. 4.3.2

La oss finne modalverdien i à posteriori tettheten for λ gitt i (4.2.4). Vi har:

$$\begin{aligned} \ln \pi(\lambda|D_2) &= (a+m) \ln(b + \sum_{i=1}^m y_i) \\ &\quad + (a+m-1) \ln \lambda - \lambda(b + \sum_{i=1}^m y_i) - \ln \Gamma(a+m) \\ \frac{\partial \ln \pi(\lambda|D_2)}{\partial \lambda} &= \frac{a+m-1}{\lambda} - (b + \sum_{i=1}^m y_i) \end{aligned}$$

Ved å sette den deriverte lik 0, finner vi modalverdien og dermed punkttestimatet:

$$\tilde{\lambda} = \frac{a+m-1}{b + \sum_{i=1}^m y_i}$$

Eks. 4.3.3 (Prediksjon)

Anta vi på bakgrunn av (4.2.4) ønsker å beregne (prediktere) sannsynligheten for at en ny metallstreng overlever 1000 timers høy statistisk belastning. La

$X =$ Levetid for ny metallstreng

Vi har da:

$$\begin{aligned} P(X > 1000) &= \int_0^{\infty} P(X > 1000|\lambda)\pi(\lambda|D_2)d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-\lambda 1000)(b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m} \lambda^{a+m-1} \exp(-\lambda(b + \sum_{i=1}^m y_i))/\Gamma(a+m)d\lambda \\ &= \frac{(b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m}}{(1000 + b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m}} = \left(1 + \frac{1000}{b + \sum_{i=1}^m y_i}\right)^{-(a+m)} \end{aligned}$$

Hvis vi nå har mye data, dvs. $m \gg a$, $\sum_{i=1}^m y_i \gg b$, får vi følgende tilnærmede uttrykt ved sannsynlighetsmaksimeringsestimaten $\lambda^* = m / \sum_{i=1}^m y_i$ for λ :

$$P(X > 1000) \approx (1 + \lambda^* 1000 / m)^{-m} \approx \exp(-\lambda^* 1000)$$

Dette siste er nettopp det klassiske sannsynlighetsmaksimeringsestimaten for den søkte sannsynlighet.

For å bidra til et kanskje mer balansert syn på Bayesiansk inferensteori skal vi avslutte dette avsnittet med følgende to kommentarer.

- i) En naturlig konjugert à priori fordeling er som oftest tilstrekkelig brukbar til å beskrive vår opprinnelige usikkerhet om parameteren θ . Innvendingen mot å bruke en slik fordeling er at dette tvinger à posteriori fordelingen til å være medlem av samme klasse av fordelinger *uansett hva slags nye data vi måtte ha fått*.
- ii) Hvis vi har en parametervektor $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, og det er urealistisk å anta at $\theta_1, \dots, \theta_s$ er uavhengige à priori, vil vi ofte ha store problemer med å modellere vår à priori innsikt om disse avhengighetsforholdene. Har vi lite data, vil à posteriori fordelingen kunne bli svært lite robust overfor endringer i à priori antagelsene om avhengighet.

Innvendingen i i) imøtegås ved å benytte numeriske integrasjonsmetoder ved oppdateringen i stedet for å velge en naturlig konjugert à priori fordeling. Innvendingen i ii) er langt alvorligere og kan virke dempende på bruken av Bayesianske metoder i modeller med mange parametre.

4.4 Bayes suffisiens

For å beregne à posteriori sannsynlighetstettheten $\pi(\theta|D)$, gitt ved (4.1.1), for en parameter θ gitt dataene D , trengs rimelighetsfunksjonen $L(\theta|D)$. Denne formidler den informasjonen om θ som dataene D har skaffet til veie. Ofte er det slik at det er tilstrekkelig (eng. sufficient) å bare kjenne summariske funksjoner av dataene for å kunne etablere rimelighetsfunksjonen. Dette leder til følgende definisjon.

Definisjon 4.4.1

La θ være en ukjent parameter med rimelighetsfunksjonen $L(\theta|D)$ basert på dataene D . En funksjon av dataene, $s(D)$, som godt kan være en vektor, er *Bayes suffisient* for θ hviss for *enhver* à priori tetthet $\pi_0(\theta)$, à posteriori tettheten $\pi(\theta|D)$, gitt ved (4.1.1), bare avhenger av D gjennom $s(D)$. Dvs. for enhver $\pi_0(\theta)$ kan vi skrive à posteriori tettheten som $\pi(\theta|s(D))$.

En enkel måte å finne en Bayes suffisient funksjon av dataene på er gitt i følgende teorem.

Teorem 4.4.2

Hvis rimelighetsfunksjonen $L(\theta|D)$ har følgende faktorisering:

$$L(\theta|D) = g(s(D)|\theta)h(D),$$

der $h(D)$ ikke avhenger av θ , er $s(D)$ en Bayes suffisient funksjon av dataene for θ .

Bevis:

Fra (4.1.1) har vi:

$$\begin{aligned}\pi(\theta|D) &= \frac{g(s(D)|\theta)h(D)\pi_0(\theta)}{\int_{\Theta} g(s(D)|\theta)h(D)\pi_0(\theta)d\theta} \\ &= k_1 g(s(D)|\theta)\pi_0(\theta)\end{aligned}$$

Herav ser vi at $\pi(\theta|D)$ bare avhenger av D gjennom $s(D)$ for enhver $\pi_0(\theta)$. Følgelig er $s(D)$ en Bayes suffisient funksjon av dataene for θ .

Eks. 4.4.1

Ved å ta utgangspunkt i rimelighetsfunksjonen $L(\lambda|D_1)$, gitt ved (4.2.1), for feilintensiteten λ i den eksponensielle modell, finner vi følgende Bayes suffisiente funksjon av dataene for λ

$$s(D_1) = (n, \sum_{i=1}^n x_i)$$

Det at n her er kjent ($= 100$) spiller liten rolle siden en Bayes suffisient funksjon ikke er noen tilfeldig variabel. Dette til forskjell fra klassisk statistikk der en suffisient observator er en tilfeldig variabel. Bayes suffisiens kalles ofte Kolmogorov suffisiens, mens suffisiens i klassisk statistikk ofte kalles Fisher suffisiens. Det kan vises at Fisher suffisiens medfører Kolmogorov suffisiens. Den motsatte implikasjonen holder imidlertid ikke generelt.

4.5 Alternative forsøksplaner for levetidstesting i en eksponensiell modell

Vi skal nå gå tilbake til den eksponensielle modellen beskrevet i Avsnitt 4.2 og se på noen alternative forsøksplaner. Der så vi på den trivielle forsøksplan der forsøket ble avbrutt først når alle levetidene var observert. To av rimelighetsfunksjonene som er beskrevet i det følgende, representerer simultanfordelinger til tilfeldige variable der en er diskret fordelt mens de øvrige er absolutt kontinuerlig fordelt. En presis utledning av disse rimelighetsfunksjonene er bare mulig ved bruk av teori for mål og sannsynlighet. Dette vil vi ikke gå inn på her, men bare nøye oss med en noe mindre tilfredsstillende utledning.

a) *Fullstendig observasjon inntil et bestemt antall forsøksenheter har feilet*

Vi har n forsøksenheter og vi avbryter forsøket når k enheter har feilet, $1 \leq k \leq n$. Her er k forhånds spesifisert. $k = n$ svarer til den trivielle forsøksplanen beskrevet i Avsnitt 4.2. La

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(k)},$$

være de observerte, *ordnede* levetider. Betegn disse dataene fra forsøket med $D = (x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$. Rimelighetsfunksjonen for feilintensiteten λ er da gitt ved:

$$\begin{aligned} L(\lambda|D) &= \frac{n!}{(1!)^k (n-k)!} \prod_{i=1}^k \lambda e^{-\lambda x_{(i)}} (e^{-\lambda x_{(k)}})^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \lambda^k \exp(-\lambda [\sum_{i=1}^k x_{(i)} + (n-k)x_{(k)}]) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \lambda^k \exp(-\lambda T), \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

der

$$T = \sum_{i=1}^k x_{(i)} + (n-k)x_{(k)}$$

er den *totale testtid* for forsøksenheterne frem til forsøket avbrytes. Legg merke til den multinomiske koeffisienten $n!/[(1!)^k (n-k)!]$ som inngår i $L(\lambda|D)$ pga. av at vi baserer oss på de ordnede levetider. Siden denne koeffisienten ikke avhenger av λ , vil den forkortes bort under utledningen av λ posteriori sannsynlighetstettheten for λ .

Anta nå at vår λ priori tetthet for λ er en gamma tetthet med formparameter a og skalaparameter b . Fullstendig analogt med utledningen av (4.2.4) finner vi at λ posteriori tettheten $\pi(\lambda|D)$ er en gamma tetthet med formparameter $a+k$ og skalaparameter $b+T$, dvs.

$$\pi(\lambda|D) = (b+T)^{a+k} \lambda^{a+k-1} \exp(-\lambda(b+T)) / \Gamma(a+k) \tag{4.5.2}$$

b) *Fullstendig observasjon inntil et fast tidspunkt*

Vi har n forsøksenheter som blir testet fra tidspunkt $t = 0$. Forsøket avbrytes etter en forhånds spesifisert tid $t = t_0$. La

$K =$ antall enheter som feiler i $[0, t_0]$

K er her en tilfeldig variabel som er binomisk fordelt $(n, 1 - \exp(-\lambda t_0))$, gitt feilintensiteten λ , dvs.:

$$\begin{aligned} P(K = k|\lambda) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} (1 - \exp(-\lambda t_0))^k \exp(-\lambda t_0 (n-k)), \\ &k = 0, \dots, n \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

La videre X være eksponensielt fordelt med feilintensitet λ , gitt λ . Vi har da følgende betingete tetthet for X gitt $X \leq t_0$:

$$f(x|X \leq t_0, \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)/(1 - \exp(-\lambda t_0)), \quad 0 \leq x \leq t_0 \quad (4.5.4)$$

Gitt $K = k$, la

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(k)},$$

være de tilhørende, observerte, ordnete levetider. Disse har følgende simultane tetthet:

$$f(x_{(1)}, \dots, x_{(k)}|K = k, \lambda) = \frac{k!}{(1!)^k} \prod_{i=1}^k [\lambda \exp(-\lambda x_{(i)})/(1 - \exp(-\lambda t_0))],$$

$$0 \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(k)} \leq t_0 \quad (4.5.5)$$

Betegn dataene fra forsøket med $D = (x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, K = k)$. Ved å multiplisere (4.5.3) og (4.5.5) blir rimelighetsfunksjonen for λ nå:

$$L(\lambda|D) = \frac{n!}{(n-k)!} \lambda^k \exp(-\lambda T), \quad (4.5.6)$$

der

$$T = \sum_{i=1}^k x_{(i)} + (n-k)t_0$$

er den totale testtid. Ved å benytte en à priori tetthet for λ som i a), fremkommer à posteriori tettheten $\pi(\lambda|D)$ gitt ved (4.5.2), vel og merke med korrekt fortolkning av k og T .

c) *Invers binomisk forsøksplan*

Anta at vi kun har et forsøkskammer til disposisjon og bare kan teste en forsøksenhet av gangen. Vi tester da hver enhet inntil den feiler, men ikke utover tiden $t = t_0$. Den blir så erstattet av en ny enhet. Dette gjentas inntil k enheter har feilet. Her er k forhåndsspesifisert. La

N = antall enheter som må testes før k har feilet

N er her en tilfeldig variabel som er negativ binomisk fordelt $(k, 1 - \exp(-\lambda t_0))$, gitt λ , dvs.:

$$P(N = n|\lambda) = \binom{n-1}{k-1} (1 - \exp(-\lambda t_0))^k \exp(-\lambda t_0(n-k)),$$

$$n = k, k+1, \dots \quad (4.5.7)$$

La X være som i b) med betinget tetthet gitt $X \leq t_0$, gitt ved (4.5.4). La videre

$$x_1, x_2, \dots, x_k,$$

være de tilhørende, observerte levetider for de k enheter som feiler, nummerert i den rekkefølge de blir observert. Disse har følgende simultane tetthet:

$$f(x_1, \dots, x_k | \lambda) = \prod_{i=1}^k [\lambda \exp(-\lambda x_i) / (1 - \exp(-\lambda t_0))],$$

$$0 \leq x_i \leq t_0, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.5.8)$$

Betegn dataene fra forsøket med $D = (x_1, \dots, x_k, N = n)$. Ved å multiplisere (4.5.7) og (4.5.8) blir rimelighetsfunksjonen for λ nå:

$$L(\lambda | D) = \binom{n-1}{k-1} \lambda^k \exp(-\lambda T), \quad (4.5.9)$$

der

$$T = \sum_{i=1}^k x_i + (n-k)t_0$$

er den totale testtid. Ved igjen å benytte en à priori tetthet for λ som i a), fremkommer à posteriori tettheten $\pi(\lambda | D)$ gitt ved (4.5.2), vel og merke med korrekt fortolkning av k og T .

Vi skal nå knytte en del sammenfattende kommentarer til resultatene over. Fra (4.5.1), (4.5.6), (4.5.9) og Teorem 4.4.2 følger det at (k, T) , der k er antall enheter som svikter og T er total testtid, er en Bayes suffisient funksjon av dataene for λ for alle planene.

Med en stopperregel menes en regel som brukes til å bestemme når et forsøk skal avbrytes. Stopperreglene i de tre planene som er behandlet over, har ikke noen kobling til den løpende informasjon om λ . Vi sier derfor at disse stopperreglene er *ikke-informative* om λ . Hvis disse stopperreglene hadde vært informative om λ , kunne ikke (k, T) være Bayes suffisient for λ .

Videre er for alle planene à posteriori tettheten en gamma tetthet der formparameteren er oppdatert fra a til $a+k$ og skalaparameteren oppdatert fra b til $b+T$ i forhold til à priori tettheten.

La $\tilde{\Lambda}$ være gammafordelt med formparameter a og skalaparameter b . Da er:

$$\begin{aligned} E\tilde{\Lambda} &= \int_0^{\infty} \lambda b^a \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) / \Gamma(a) d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)b} \int_0^{\infty} b^{a+1} \lambda^a \exp(-b\lambda) / \Gamma(a+1) d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)b} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Tilsvarende finner en at:

$$E\tilde{\Lambda}^2 = \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)b^2} = \frac{(a+1)a}{b^2},$$

og dermed:

$$\text{Var } \tilde{\Lambda} = \frac{(a+1)a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b^2}$$

Et standardisert spredningsmål, variasjonskoeffisienten, blir da:

$$\text{Varkoeff } \tilde{\Lambda} = \frac{\sqrt{\text{Var } \tilde{\Lambda}}}{E\tilde{\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Fra Teorem 4.3.2 følger det nå for alle planene at Bayesestimaten, $\hat{\lambda}$, for λ , når en benytter en kvadratisk tapsfunksjon, er gitt ved:

$$\hat{\lambda} = \frac{a+k}{b+T} \quad (4.5.10)$$

Det tilsvarende estimatet à priori er

$$\hat{\lambda}_0 = a/b \quad (4.5.11)$$

Variasjonskoeffisienten à posteriori er

$$1/\sqrt{a+k},$$

som er oppdatert fra $1/\sqrt{a}$ à priori. Dette viser at den standardiserte spredningen reduseres à posteriori bare hvis noen enheter har sviktet. Variasjonskoeffisienten karakteriserer i en viss forstand formen på gammafordelingen. Det er derfor naturlig at denne koeffisienten bare avhenger av formparameteren og ikke av skalaparameteren.

Helt parallelt til utledningen i Eks. 4.3.2 finner en for alle planene følgende modalverdi à posteriori:

$$\tilde{\lambda} = \frac{a+k-1}{b+T} \quad (4.5.12)$$

Det tilsvarende estimat à priori er:

$$\tilde{\lambda}_0 = (a-1)/b \quad (4.5.13)$$

Dette siste estimatet er selvsagt bare fornuftig hvis $a > 1$. Legg merke til likheten mellom estimatene (4.5.10) og (4.5.12), og (4.5.11) og (4.5.13).

Ved å maksimere rimelighetsfunksjonene (4.5.1), (4.5.6) og (4.5.9) ser en at sannsynlighetsmaksimeringsestimaten for $\theta = 1/\lambda, \theta^*$, for alle planene er gitt ved:

$$\theta^* = T/k. \quad (4.5.14)$$

4.6 Bayesiansk inferens for forventningen i en eksponensiell modell

Vi går nå tilbake til vårt forsøk i Avsnitt 4.2 og skal se på inferens for forventningen, $\theta = 1/\lambda$, i den eksponensielle modell. Det følger med en gang fra (4.2.1) at rimelighetsfunksjonen for θ gitt dataene $D_1 = (x_1, \dots, x_n)$ er gitt ved:

$$L(\theta|D_1) = \theta^{-n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i/\theta\right)$$

Anta også nå at vi en viss forstand er uten informasjon om parameteren før forsøket settes i gang. Vi velger derfor à priori sannsynlighetstettheten $\pi_0(\theta)$ utfra en uniform modell:

$$\pi_0(\theta) = \begin{cases} M^{-1} & 0 \leq \theta \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.6.1)$$

Her er igjen M svært stor, f.eks. 10^{12} . Legg merke at denne uvitenheten ikke er konsistent med å bruke den samme à priori fordeling for λ slik vi gjorde i (4.2.2). (4.6.1) svarer derimot til følgende à priori fordeling for λ :

$$\pi_0(\lambda) = \begin{cases} M^{-1}\lambda^{-2} & M^{-1} \leq \lambda < \infty \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.6.2)$$

Hvis nemlig en tilfeldig variabel X har sannsynlighetstetthet (4.6.1), vil X^{-1} ha sannsynlighetstetthet (4.6.2), dvs. (4.6.1) og (4.6.2) er inverse tettheter.

Fra (4.1.1) har vi:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|D_1) &= \frac{M^{-1}\theta^{-n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i/\theta\right)}{\int_0^M M^{-1}\theta^{-n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i/\theta\right) d\theta} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n-1} \theta^{-n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i/\theta\right)}{\int_0^M \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n-1} \theta^{-n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i/\theta\right) d\theta} \end{aligned}$$

Ved å substituere $y = \sum_{i=1}^n x_i/\theta$ i integralet i nevneren får vi videre:

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n-1} \theta^{-n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i/\theta\right)}{\int_{\sum_{i=1}^n x_i/M}^{\infty} y^{n-2} \exp(-y) dy}$$

Sannsynlighetsmaksimeringsestimatet for θ er $\theta^* = \sum_{i=1}^n x_i/n$. Vi har da:

$$\sum_{i=1}^n x_i/M = \theta^* n/M$$

Hvis vi har valgt $M \gg \theta^*$, har vi:

$$\int_{\sum_{i=1}^n x_i/M}^{\infty} y^{n-2} \exp(-y) dy \approx \int_0^{\infty} y^{n-2} \exp(-y) dy = \Gamma(n-1)$$

Dermed har vi vist:

$$\pi(\theta|D_1) \approx \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n-1} \theta^{-n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i/\theta\right) / \Gamma(n-1) \quad 0 \leq \theta < \infty \quad (4.6.3)$$

Høyre side her er en invers gamma tetthet med formparameter $a = n-1$ og skalaparameter $b = \sum_{i=1}^n x_i$ som jo er forsøkets totale testtid. Som navnet sier er gammatettheten og den inverse gammatettheten *med felles parametre* inverse tettheter. Dette betyr at à posteriori usikkerheten i θ gitt ved (4.6.3) *ikke* er konsistent med à posteriori usikkerheten i λ gitt ved (4.2.3). Skalaparameteren er riktignok felles, men formparameteren er $n-1$ i (4.6.3) og $n+1$ i (4.2.3). Denne inkonsistensen mellom disse à posteriori tetthetene er selvsagt nedarvet fra inkonsistensen mellom à priori tetthetene (4.2.2) og (4.6.1).

Anta også nå at vi utfører et nytt forsøk uavhengig av det første og ender opp med dataene $D_2 = (y_1, \dots, y_m)$. Vi benytter da høyre side av (4.6.3) som vår à priori sannsynlighetstetthet med parametrene a og b som gitt over. (4.1.1) gir nå følgende à posteriori sannsynlighetstetthet:

$$\pi(\theta|D_2) = \frac{\theta^{-m} \exp\left(-\sum_{i=1}^m y_i/\theta\right) b^a \theta^{-(a+1)} \exp(-b/\theta) / \Gamma(a)}{\int_0^{\infty} \theta^{-m} \exp\left(-\sum_{i=1}^m y_i/\theta\right) b^a \theta^{-(a+1)} \exp(-b/\theta) / \Gamma(a) d\theta}$$

Vi multipliserer nå med $(b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m}$ i teller og nevner og substituerer $y = (b + \sum_{i=1}^m y_i)/\theta$ i integralet i nevneren. Dette gir videre:

$$\begin{aligned} &= \frac{(b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m} \theta^{-(a+m+1)} \exp\left(-\left(b + \sum_{i=1}^m y_i\right)/\theta\right)}{\int_0^{\infty} y^{a+m-1} \exp(-y) dy} \\ &= (b + \sum_{i=1}^m y_i)^{a+m} \theta^{-(a+m+1)} \exp\left(-\left(b + \sum_{i=1}^m y_i\right)/\theta\right) / \Gamma(a+m) \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Følgelig er à posteriori tettheten også en invers gamma tetthet med formparameter $n-1+m$ og skalaparameter $\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i$. Den inverse gammafordelingen er derfor en naturlig konjugert à priori fordeling for forventningen i den eksponensielle modell. Hvis a er formparameteren i en slik fordeling, kan $a+1$ fortolkes som antall observasjoner i et tidligere forsøk. Skalaparameteren b kan fortolkes som den tilhørende totale testtid. Igjen kan dette forsøket være reelt eller fiktivt. Legg igjen merke til at inkonsistensen mellom à priori tetthetene (4.2.2) og (4.6.1) leder til en inkonsistens også her. Over fortolkes $a+1$ som antall observasjoner i et tidligere forsøk, mens dette antallet var $a-1$ i Avsnitt 4.2. For å være konsistent må vi fortolke formparameteren på samme måte enten vi ser på inferens for λ eller $\theta = 1/\lambda$. Et fornuftig kompromiss er å fortolke formparameteren a i begge tilfelle som antall observasjoner i et tidligere forsøk. For å unngå uekte à priori tettheter antas $a, b > 0$.

Hvis vi betrakter de alternative forsøksplanene beskrevet i Avsnitt 4.5, gjelder selvsagt fortsatt rimelighetsfunksjonene (4.5.1), (4.5.6) og (4.5.9) innsatt med $\lambda = 1/\theta$. Anta uansett forsøksplan at vår à priori tetthet for θ er en invers gamma tetthet med formparameter a og skalaparameter b . Fullstendig analogt med utledningen av (4.6.4) finner vi at à posteriori tettheten $\pi(\theta|D)$ er en invers gamma tetthet med formparameter $a+k$ og skalaparameter $b+T$ uansett forsøksplan, dvs.

$$\pi(\theta|D) = (b+T)^{a+k} \theta^{-(a+k+1)} \exp(-(b+T)/\theta) / \Gamma(a+k) \quad (4.6.5)$$

Det følger umiddelbart av rimelighetsfunksjonene (4.5.1), (4.5.6) og (4.5.9) innsatt med $\lambda = 1/\theta$, samt Teorem 4.4.2, at (k, T) også er en Bayes suffisient funksjon av dataene for θ for alle planene.

La $\tilde{\Theta}$ være invers gammafordelt med formparameter a og skalaparameter b . Da er:

$$\begin{aligned} E\tilde{\Theta} &= \int_0^{\infty} \theta b^a \theta^{-(a+1)} \exp(-b/\theta) / \Gamma(a) d\theta \\ &= \frac{\Gamma(a-1)b}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} b^{a-1} \theta^{-a} \exp(-b/\theta) / \Gamma(a-1) d\theta \\ &= \frac{\Gamma(a-1)b}{\Gamma(a)} = \frac{b}{a-1} \end{aligned}$$

For alle planene følger nå fra Teorem 4.3.2 at Bayesestimatet, $\hat{\theta}$, for θ , når en benytter en kvadratisk tapsfunksjon, er gitt ved:

$$\hat{\theta} = \frac{b+T}{a+k-1} \quad (4.6.6)$$

Det tilsvarende estimat à priori er:

$$\hat{\theta}_0 = b/(a-1) \quad (4.6.7)$$

Husk at sannsynlighetsmaksimeringsestimatet, θ^* , for θ er gitt ved (4.5.14). Vi har nå følgende særdeles interessante sammenheng:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{b+T}{a+k-1} = \frac{b}{a-1} \frac{a-1}{a+k-1} + \frac{T}{k} \frac{k}{a+k-1} \\ &= \hat{\theta}_0 w + \theta^*(1-w),\end{aligned}\tag{4.6.8}$$

der $w = (a-1)/(a+k-1)$.

(4.6.8) kalles en troverdighetsformel (eng. credibility formula). Den viser at Bayesestimaten for θ kan skrives som et veiet gjennomsnitt av det tilsvarende estimatet à priori og sannsynlighetsmaksimeringsestimatet. Legg merke til at ettersom k , antall enheter som svikter, øker, blir mer vekt lagt på sannsynlighetsmaksimeringsestimatet og mindre på à priori estimatet. Formelen viser hvordan vårt endelige estimat for θ er balansert mellom ingeniørens skjønn og de rene data fra forsøket, og inviterer *formelig* til samarbeid mellom ingeniøren og statistikeren.

Legg også merke til at så lenge $k = 0$, så vil $\theta^* = \infty$ uansett total testtid T . Dette er helt urimelig. Bayesestimaten for $k = 0$ er derimot

$$\hat{\theta} = \frac{b+T}{a-1}$$

Dette er endelig for $a > 1$ og øker lineært i den totale testtiden T . Dette er naturlig. Dess lengre tid det går før noen enheter svikter, dess lengre vil vi anslå enhetenes forventede levetid å være. Bayesianere, uttrykker dette slik: “Bayesians learn while waiting (for the first failure)”.

Anta nå at en ikke baserer seg på den naturlig konjugerte à priori fordeling for θ . Følgende teorem, som vi gjengir uten bevis, er hentet fra Barlow og Proschan (1985).

Teorem 4.6.1

La $\pi_0(\theta)$ være en à priori tetthet over Θ slik at $\{\theta | \pi_0(\theta) > 0\}$ er et intervall i $[0, \infty)$ og la $\pi(\theta|k, T)$ være den tilhørende à posteriori tetthet basert på den Bayes suffisiente funksjon (k, T) av dataene. Da er:

$$P[\tilde{\Theta} > \theta_0 | k, T] = \int_{\theta_0}^{\infty} \pi(\theta|k, T) d\theta$$

ikke-voksende i $k > 0$ for fast T , og ikke-avtagende i T for fast k . Dvs. à posteriori tilfeldig variabelen $\tilde{\Theta}$ er stokastisk ikke-voksende i k og stokastisk ikke-avtagende i T . Spesielt har en:

$$E[\tilde{\Theta} | k = 0, T] \geq E[\tilde{\Theta} | k = 0, T = 0]\tag{4.6.9}$$

Hovedresultatet i Teorem 4.6.1 er intuitivt opplagt. Venstre side av (4.6.9) er Bayesestimaten for θ basert på dataene $(k = 0, T)$, mens høyre side er det tilsvarende estimat à priori. (4.6.9) viser at utsagnet “Bayesians learn while they wait (for the first failure)” på ingen måte er knyttet til bruk av naturlig konjugerte à priori fordelinger.

4.7 Bayesiansk estimering av systempålitelighet

Vi skal nå se på hvordan den Bayesianske metodelære kan brukes til å estimere systempålitelighet. Som nevnt allerede i Avsnitt 1.2 er det karakteristiske for teorien her at en ønsker å utnytte skjønn, erfaringer og data både for systemets komponenter og for systemet selv. Teorien i det følgende er hentet fra Natvig og Eide (1987).

Utgangspunktet vårt er nå i hovedsak det samme som i Avsnitt 3.1 da vi innførte systempåliteligheten. Vektoren av komponentpåliteligheter, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$, ble da betraktet som kjent. Vi skal nå betrakte parametervektoren, \underline{p} , som fast, men ukjent for oss. Vår à priori usikkerhet om \underline{p} , $\pi(\underline{p})$, antas gitt som:

$$\pi(\underline{p}) = \prod_{i=1}^n \pi_i(p_i), \quad (4.7.1)$$

der $\pi_i(p_i)$ er den marginale à priori sannsynlighetstetthet for p_i . Vi antar med andre ord at komponentpålitelighetene er uavhengige à priori.

Anta så at vi utfører forsøk på komponentnivå og innhenter dataene $\underline{D} = (D_1, \dots, D_n)$, der D_i er data hentet fra eksperimentet utført for i -te komponent. Vi antar at gitt \underline{p} , så er D_1, \dots, D_n uavhengige. Følgelig er à posteriori simultantettheten for \underline{p} , $\pi(\underline{p}|\underline{D})$, lik:

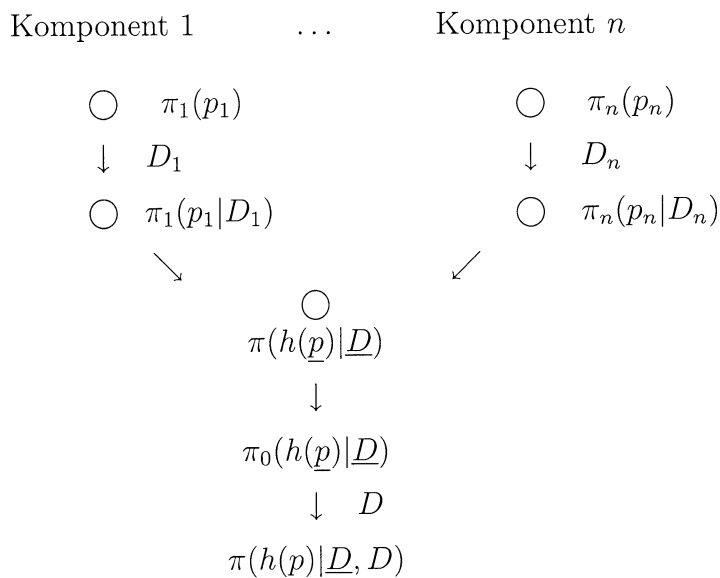
$$\pi(\underline{p}|\underline{D}) = \prod_{i=1}^n \pi_i(p_i|D_i), \quad (4.7.2)$$

der $\pi_i(p_i|D_i)$ er den marginale à posteriori sannsynlighetstetthet for p_i . Vi har her benyttet Teorem 4.1.3 (Bayes Teorem) og (4.7.1). (4.7.2) sier at komponentpålitelighetene også er uavhengige à posteriori.

Hvis nå komponenttilstandene X_1, \dots, X_n er uavhengige gitt \underline{p} , kan den tilhørende sannsynlighetstetthet, $\pi(h(\underline{p})|\underline{D})$, *i prinsippet* utledes fra (4.7.2) ved å benytte transformasjonsformelen for sannsynlighetstettheter. Dette forutsetter for det første at systemet ikke er mer komplekst enn at vi greier å finne et eksakt uttrykk for systempåliteligheten, $h(\underline{p})$, ved f.eks. å bruke faktoriseringsalgoritmen. Dernest må uttrykket for $h(\underline{p})$ ikke være verre enn at vi greier å benytte transformasjonsformelen. Hvis vi nå klarer dette, må vi utnytte à priori skjønn og erfaringer på systemnivå for å korrigere $\pi(h(\underline{p})|\underline{D})$ til $\pi_0(h(\underline{p})|\underline{D})$, som er à priori sannsynlighetstettheten for systempåliteligheten. Anta så til slutt at vi utfører forsøk på systemnivå og innhenter dataene D . Vi ender da opp med à posteriori sannsynlighetstettheten, $\pi(h(\underline{p})|\underline{D}, D)$ for systempåliteligheten. Prosedyren illustreres i Figur 4.7.1.

Vi har nå en drøm om få alt dette til å henge i hop på en matematisk bekvem måte. Først velges $\pi_i(p_i)$ som en naturlig konjugert à priori tetthet for p_i relativt til eksperimentet D_i for $i = 1, \dots, n$. Denne delen av drømmen kan nok oppfylles. Dernest håper vi at vi kan transformere oss frem til $\pi(h(\underline{p})|\underline{D})$ før korreksjonen til $\pi_0(h(\underline{p})|\underline{D})$ foretas. Hvis systemet ikke er for komplekst, skulle også dette kunne gå bra. Det som synes umulig

er at vi ender opp med en $\pi_0(h(\underline{p})|\underline{D})$ som er den naturlige konjugerte à priori tetthet for $h(\underline{p})$ relativt til eksperimentet D . Om ikke før får vi det i alle fall matematisk ubekvem på systemnivå.



Figur 4.7.1

For å klarlegge dette problemet skal vi se på et eksempel hentet fra boken Martz og Waller (1982, s. 504–507). Betrakt et seriesystem av n uavhengige komponenter gitt \underline{p} . La levetiden til i -te komponent være eksponensielt fordelt med feilrate λ_i , $i = 1, \dots, n$. Betrakt systemet på tidspunkt t . Da er:

$$p_i = \exp(-\lambda_i t)$$

$$h(\underline{p}) = \prod_{i=1}^n p_i = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right) = \exp(-\lambda t),$$

der $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Vårt inferensproblem kan nå transformeres til å se på λ_i -ene i stedet for p_i -ene og λ i stedet for $h(\underline{p})$.

Vi er nå på velkjent grunn og kan utnytte resultater fra Avsnitt 4.5. Anta at eksperimentene på komponentnivå gir $D_i = (k_i, T_i)$, $i = 1, \dots, n$ der k_i er antall i -te komponenter som svikter og T_i er den tilhørende totale testtid. Anta tilsvarende at $D = (k, T)$ er resultatet av eksperimentet på systemnivå. Vår à priori usikkerhet om λ_i beskrives nå ved en gamma tetthet med formparameter a_i og skalaparameter b_i . Dette leder da til en à posteriori tetthet for λ_i med formparameter $a_i + k_i$ og skalaparameter $b_i + T_i$. Anta at vi i vår drømmeverden registrerer $b_i + T_i = b$, $i = 1, \dots, n$. Det følger da at $\pi(\lambda|\underline{D})$ er en gamma tetthet med formparameter $\sum_{i=1}^n (a_i + k_i)$ og skalaparameter b . Hvis vi nå ikke foretar noen korreksjon av denne pga. à priori erfaringer på systemnivå, ender vi opp

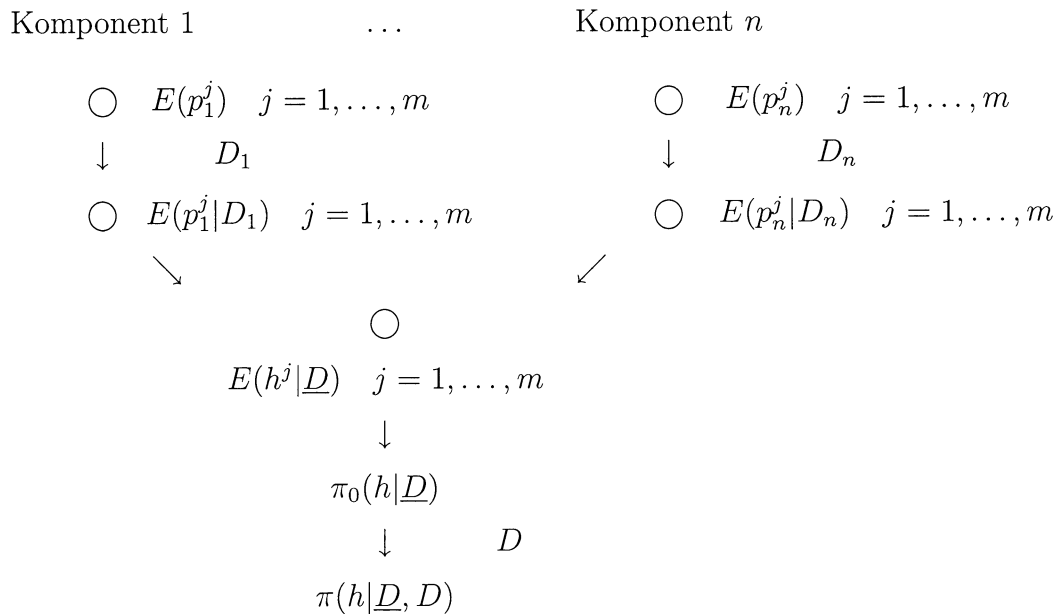
med en à posteriori sannsynlighetstetthet for $\lambda, \pi(\lambda|\underline{D}, D)$, som er en gamma tetthet med formparameter $\sum_{i=1}^n (a_i + k_i) + k$ og skalaparameter $b + T$.

Ikke glem at dette var en drøm og at drømmen var basert på uavhengige komponenttilstander gitt \underline{p} !

På bakgrunn av erfaringene over reduserer vi våre ambisjoner. Vi starter med å beskrive momentene opp til orden m , $E(p_i^j)$, $j = 1, \dots, m$, av $\pi_i(p_i)$, $i = 1, \dots, n$. Disse oppdateres så til à posteriori momentene $E(p_i^j|D_i)$, $j = 1, \dots, m$, av $\pi_i(p_i|D_i)$ ved f.eks. å bruke resultater fra Mastran og Singpurwalla (1978). Fra disse oppnåes igjen *grenser* for momentene $E(h^j|\underline{D})$, $j = 1, \dots, m$ av $\pi(h|\underline{D})$. Legg merke til at vi nå ikke nødvendigvis trenger at komponenttilstandene er uavhengige gitt \underline{p} . Fra disse grensene og à priori skjønn og erfaringer på systemnivå tilpasses $\pi_0(h|\underline{D})$. Denne oppdateres så endelig til $\pi(h|\underline{D}, D)$. Prosedyren illustreres i Figur 4.7.2.

4.8 Grenser for momentene i tettheten til systempåliteligheten

En nøkkelovergang i prosedyren over er etableringen av grensene for momentene i tettheten til systempåliteligheten utfra tilsvarende momenter i tetthetene til komponentpålitelighetene. I dette avsnittet skal vi se nærmere på denne overgangen. For å forenkle notasjonen skal vi sløyfe henvisningen til data \underline{D} på komponentnivå.



Figur 4.7.2

La oss et øyeblikk anta at komponenttilstandene er uavhengige gitt \underline{p} . Siden p_i -ene er

uavhengige, følger det fra (3.1.2) i Lemma 3.1.2 at

$$\begin{aligned} Eh(\underline{p}) &= \sum_{\underline{x} \in \{0,1\}^n} \prod_{i=1}^n (Ep_i)^{x_i} (1 - Ep_i)^{1-x_i} \phi(\underline{x}) \\ &= h(E(\underline{p})), \end{aligned}$$

der $E(\underline{p}) = (Ep_1, \dots, Ep_n)$.

Ved f.eks. å bruke faktoriseringsalgoritmen er det mulig å finne et *eksakt* uttrykk for $Eh(\underline{p})$ uttrykt ved $E(\underline{p})$ selv for ganske store systemer. Poenget er imidlertid at det ikke ser ut til å være noen enkel måte å utvide angrepsmåten over til å gi eksakte uttrykk for høyere ordens momenter til $h(\underline{p})$. Følgelig vil en selv i tilfellet med uavhengige komponenttilstander gitt \underline{p} trenge grenser for høyere ordens momenter til $h(\underline{p})$.

Vi vil i det følgende trenge følgende generalisering av Teorem 3.6.1.

Teorem 4.8.1

La T_1, \dots, T_n være assosierte tilfeldige variable slik at $0 \leq T_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$. Da er for $\alpha > 0$:

$$E\left(\prod_{i=1}^n T_i\right)^\alpha \geq \prod_{i=1}^n ET_i^\alpha \quad (4.8.1)$$

$$E \prod_{i=1}^n T_i \leq \prod_{i=1}^n ET_i \quad (4.8.2)$$

For spesialtilfellet med to uavhengige tilfeldige variable T_1 og T_2 har vi:

$$E\left(\prod_{i=1}^2 T_i\right)^2 \geq \prod_{i=1}^2 ET_i^2 \quad (4.8.3)$$

Bevis:

(4.8.1) følger umiddelbart av (3.6.1) siden

$$E\left(\prod_{i=1}^n T_i\right)^\alpha = E \prod_{i=1}^n T_i^\alpha \geq \prod_{i=1}^n ET_i^\alpha$$

(4.8.2) er identisk med (3.6.2). (4.8.3) følger siden:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^2 T_i\right)^2 &= (T_1 + T_2 - T_1 T_2)^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_1^2 T_2^2 \\ &\quad + 2T_1 T_2 - 2T_1^2 T_2 - 2T_1 T_2^2 = T_1^2 + T_2^2 - T_1^2 T_2^2 \\ &\quad + 2(T_1^2 - T_1)(T_2^2 - T_2) \geq \prod_{i=1}^2 T_i^2, \end{aligned}$$

og dernest bruke at T_1 og T_2 er uavhengige.

Ulikheten (4.8.3) avslører det ubehagelige faktum at en symmetri i (4.8.1) og (4.8.2), bare er mulig for $\alpha = 1$, når T_i -ene ikke er binære.

Utgangspunktet for de følgende grenser er Teorem 3.6.4, Korollar 3.6.6 og Korollar 3.6.8. Disse gjelder også opplagt når p_1, \dots, p_n og h som her er tilfeldige størrelser. Følgende grenser gis i Mastran og Singpurwalla (1978).

Teorem 4.8.2

La h være påliteligheten til et monotont system av n assosierte komponenttilstander med uavhengige påliteligheter p_1, \dots, p_n . Da er for $m = 1, 2, \dots$

$$Eh^m \geq \prod_{i=1}^n Ep_i^m \quad (4.8.4)$$

$$E(1-h)^m \geq \prod_{i=1}^n E(1-p_i)^m \quad (4.8.5)$$

Bevis:

Fra Teorem 3.6.4 har vi:

$$Eh^m \geq E\left(\prod_{i=1}^n p_i\right)^m = E \prod_{i=1}^n p_i^m = \prod_{i=1}^n Ep_i^m,$$

idet vi har benyttet at p_i -ene er uavhengige. Dermed er (4.8.4) bevist. (4.8.5) bevises helt analogt.

(4.8.5) er faktisk bare (4.8.4) anvendt på det duale monotone system og gir ikke noe nytt. Følgende øvre grense er langt mer interessant.

Teorem 4.8.3

Gjør de samme antagelser som i Teorem 4.8.2. Da er for $m = 1, 2, \dots$

$$Eh^m \leq \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \prod_{i=1}^n \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s Ep_i^s \quad (4.8.6)$$

Bevis:

Fra Teorem 3.6.4 har vi:

$$\begin{aligned} Eh^m &\leq E\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)\right)^m \\ &= E \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \prod_{i=1}^n (1 - p_i)^r \\ &= E \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \prod_{i=1}^n \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s p_i^s \end{aligned}$$

(4.8.6) følger nå ved å benytte at p_i -ene er uavhengige.

Teoremene 4.8.2 og 4.8.3 er basert på Teorem 3.6.4. Vi får imidlertid langt bedre grenser ved å basere oss på Korollar 3.6.6 slik vi gjør i det følgende teorem.

Teorem 4.8.4

Gjør de samme antagelser som i Teorem 4.8.2. Betegn strukturens minimale stimengder (kuttmengder) med $P_1, \dots, P_p(K_1, \dots, K_k)$. Da er for $m = 1, 2, \dots$

$$\max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in P_j} E p_i^m \leq E h^m \leq \min_{1 \leq j \leq k} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \prod_{i \in K_j} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s E p_i^s \quad (4.8.7)$$

Bevis:

Fra Korollar 3.6.6 har vi:

$$\begin{aligned} E h^m &\geq E \left[\max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in P_j} p_i \right]^m \\ &= E \left[\max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in P_j} p_i^m \right] \geq E \prod_{i \in P_j} p_i^m = \prod_{i \in P_j} E p_i^m, \end{aligned}$$

for $1 \leq j \leq p$, idet vi har benyttet at p_i -ene er uavhengige. Siden ulikheten holder for alle $1 \leq j \leq p$, følger den nedre grensen i (4.8.7). Tilsvarende har vi fra Korollar 3.6.6:

$$\begin{aligned} E h^m &\leq E \left[\min_{1 \leq j \leq k} \left(\prod_{i \in K_j} p_i \right)^m \right] \\ &\leq \min_{1 \leq j \leq k} E \left[1 - \prod_{i \in K_j} (1 - p_i) \right]^m \\ &= \min_{1 \leq j \leq k} E \left[\sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \prod_{i \in K_j} (1 - p_i)^r \right] \\ &= \min_{1 \leq j \leq k} E \left[\sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \prod_{i \in K_j} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s p_i^s \right] \end{aligned}$$

Den øvre grensen i (4.8.7) følger nå ved å benytte at p_i -ene er uavhengige.

Legg merke til at (4.8.4), (4.8.5) og den nedre grensen i (4.8.7) også holder under antagelsen at p_1, \dots, p_n er assosierte. Dette sees av bevisene ved å bruke (4.8.1) i stedet for at p_i -ene er uavhengige. Ved å gjøre sterkere antagelser får vi følgende teorem.

Teorem 4.8.5

La $h(\underline{p})$ være påliteligheten til et monotont system av n komponenter med uavhengige påliteligheter p_1, \dots, p_n . La videre komponenttilstandene være uavhengige gitt \underline{p} . Betegn strukturens minimale stimengder (kuttmengder) med $P_1, \dots, P_p(K_1, \dots, K_k)$. Da er for $m = 1, 2, \dots$

$$E[h(\underline{p})]^m \geq \prod_{j=1}^k \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \prod_{i \in K_j} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s E p_i^s \quad (4.8.8)$$

$$Eh(\underline{p}) \leq \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} Ep_i \quad (4.8.9)$$

Bevis:

Fra Korollar 3.6.8 har vi:

$$E[h(\underline{p})]^m \geq E \prod_{j=1}^k \left(\prod_{i \in K_j} p_i \right)^m \geq \prod_{j=1}^k E \left(\prod_{i \in K_j} p_i \right)^m,$$

idet vi har benyttet (4.8.1). De tilfeldige størrelsene

$$\left(\prod_{i \in K_j} p_i \right)^m, \quad j = 1, \dots, k,$$

er assosierte siden de er ikke-avtagende funksjoner av de uavhengige, og følgelig assosierte, størrelsene p_1, \dots, p_n . Siden vi nå har:

$$E \left(\prod_{i \in K_j} p_i \right)^m = E \left[\sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \prod_{i \in K_j} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s p_i^s \right],$$

følger (4.8.8) ved å benytte at p_i -ene er uavhengige. (4.8.9) følger av Korollar 3.6.8 ved å benytte (4.8.2) idet de tilfeldige størrelsene

$$\prod_{i \in P_j} p_i, \quad j = 1, \dots, p,$$

er assosierte.

Pga. den manglende symmetri i Teorem 4.8.1, har vi ikke vært i stand til å etablere tilsvarende øvre grenser for $E[h(\underline{p})]^m$ i dette siste teoremet.

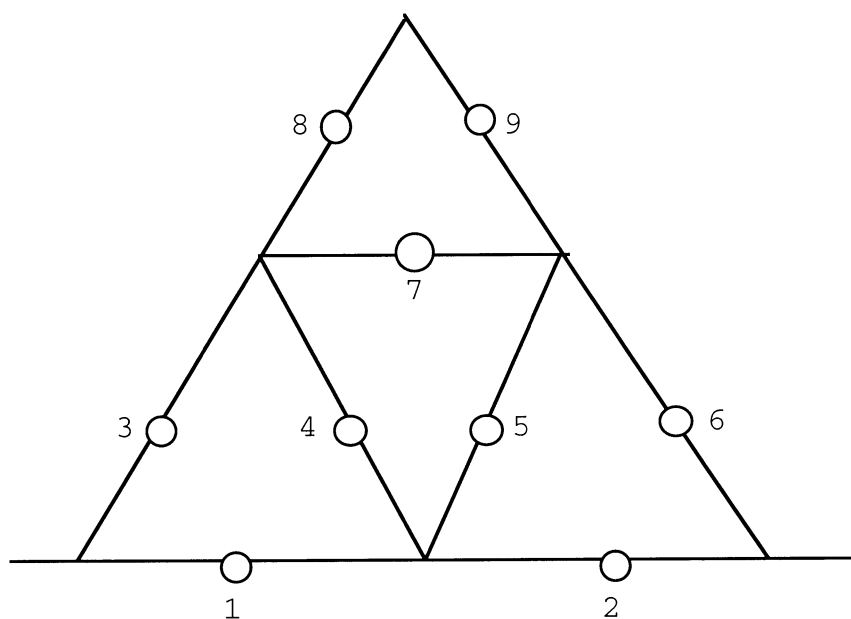
La oss nå se på et numerisk eksempel og betrakt 2-terminals nettverkssystemet med 9 komponenter gitt i Figur 4.8.1. La p_1, \dots, p_9 være betafordelt med parametre henholdsvis lik (6.4), (2.1), (3.1), (4.3), (3.1), (8.2), (9,3), (5.3) og (9.1).

Betatettheten med parametre $\alpha, \beta > 0$ har følgende form:

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} \quad 0 < p < 1 \quad (4.8.10)$$

Det er lett å vise at forventning og varians er gitt ved:

$$Ep = \alpha/(\alpha + \beta), \quad \text{Var } p = \alpha\beta/((\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)) \quad (4.8.11)$$



Figur 4.8.1

Dette leder til Tabell 4.8.1:

m	Nedre grenser fra teoremene			Eksakt verdi	Simulerte verdier	Øvre grenser fra teoremene		
	4.8.2	4.8.4	4.8.5			4.8.4	4.8.5	4.8.3
1	0.0434	0.4500	0.8006	0.8136	0.8133	0.9000	0.9717	0.99999
2	0.0032	0.2266	0.6515	–	0.6730	0.8182	–	0.99999
3	0.0003	0.1236	0.5379	–	0.5650	0.7506	–	0.99998

Tabell 4.8.1

Vi ser umiddelbart at for dette eksemplet er grensene i Teorem 4.8.2 og 4.8.3 ekstremt dårlige, mens de nedre grensene i Teorem 4.8.5 er særdeles gode og de øvre grensene i Teorem 4.8.4 ganske gode. Et mer realistisk case studie og et datamaskinprogram som beregner grensene, er gitt i Eide (1986).

Det er vist i Natvig og Eide (1987) at grensene i dette avsnittet ikke uten videre lar seg forbedre ved å innføre en modulær dekomposisjon. En har bare greid å utlede grenser, basert på modulær dekomposisjon, som er like gode som de nedre grensene i Teorem 4.8.4. Vi gir dette resultatet uten bevis.

Teorem 4.8.6

La h være påliteligheten til et monotont system (C, ϕ) av n assosierte komponenttilstander med modulær dekomposisjon $\{(A_i, \chi_i)\}_{i=1}^r$ og monoton organisasjonsstruktur ψ . Innfør

notasjonen:

$$\ell'_\phi(E\underline{p}^m) = \max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in P_j} Ep_i^m,$$

der

$$E\underline{p}^m = (Ep_1^m, \dots, Ep_n^m).$$

Da er:

$$\ell'_\phi(E\underline{p}^m) = \ell'_\psi[\ell'_{\chi_1}((E\underline{p}^m)^{A_1}), \dots, \ell'_{\chi_r}((E\underline{p}^m)^{A_r})] \quad (4.8.12)$$

Fordelen med å bruke høyre side av (4.8.12) er at disse grensene bare baserer seg på de minimale stimengdene til modulene og organisasjonsstrukturen.

Ved å sette $m = 1$ i (4.8.4) og (4.8.6), står vi igjen med grensene i Teorem 3.6.4 med h erstattet med Eh og p_i med Ep_i , $i = 1, \dots, n$. Tilsvarende for $m = 1$ reduserer Teorem 4.8.4 seg til Korollar 3.6.6 og Teorem 4.8.5 seg til Korollar 3.6.8 med h erstattet med Eh og p_i med Ep_i , $i = 1, \dots, n$. Siden grensene i Teorem 3.6.4, Korollar 3.6.6 og Korollar 3.6.8 er forbedret i Natvig (1980) ved bruk av modulær dekomposisjon, kan tilsvarende grenser for Eh gitt i dette avsnittet forbedres på samme måte. Med antagelsene i Teorem 4.8.5 gjelder spesielt grensene i Teorem 3.6.11 med h_ϕ erstattet med Eh_ϕ og p_i med Ep_i , $i = 1, \dots, n$.

La oss til slutt minne om at grensene i Teorem 3.6.4, Korollar 3.6.6 og Korollar 3.6.8 er generalisert i Natvig (1980) til også å gjelde for tilgjengeligheten og utilgjengeligheten i et fast tidsintervall I for et monotont system. Disse grensene er ytterligere generalisert i Funnemark og Natvig (1985) til å gjelde multinære monotone systemer. Det følger umiddelbart at tilsvarende generaliseringer kan gjøres av grensene gitt i dette avsnittet.

Øvelser

For dette kapittel henvises det til eksamensoppgaver i ST 105.

Kapittel 5

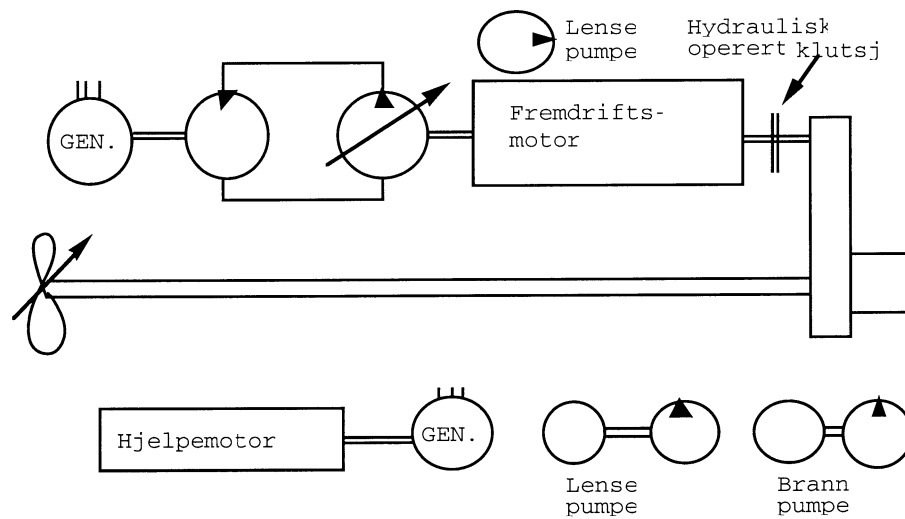
To case-studier

Som et avsluttende kapittel skal vi se på to case-studier i anvendt pålitelighetsanalyse. I det første sammenlignes påliteligheten av to anlegg til propelldrift og strømproduksjon i små fiskebåter. Dette studiet skriver seg fra et samarbeid forfatteren av dette kompendiet hadde med Fiskeriteknologisk Forskningsinstitutt i Trondheim i 1977. Det andre studiet tar for seg en pålitelighetsanalyse av et nettverk for overføring av elektroniske pulser. Dette studiet har sin bakgrunn i et oppdrag som Arne Bang Huseby og Senter for Industriforskning hadde for Norsk Hydro i 1987.

5.1 Pålitelighetsanalyse av anlegg til propelldrift og strømproduksjon i små fiskebåter

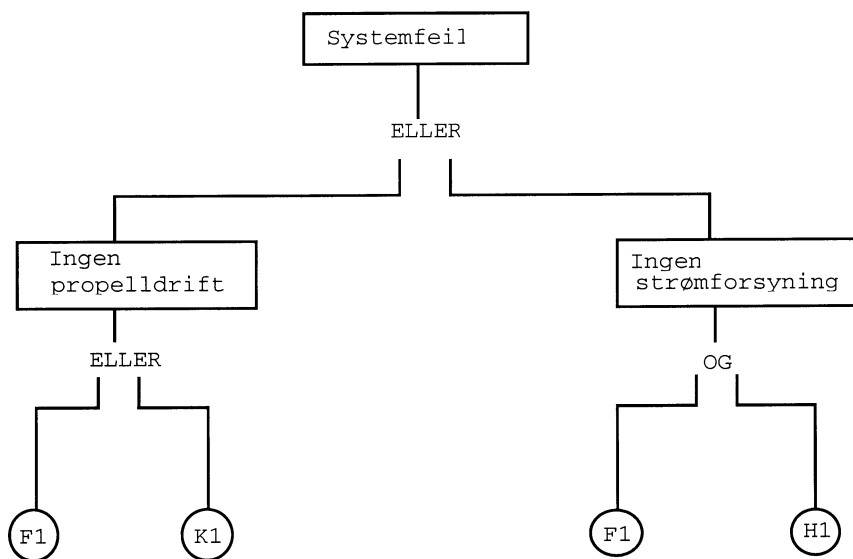
Ved sammenligning av påliteligheten til de to anleggene valgte Fiskeriteknologisk Forskningsinstitutt for enkelthets skyld å se bort fra komponenter som er like i type og antall ved begge alternativene. Dette gjelder f.eks. propellanlegg, reduksjonsgir, generatorer og hydraulikksystemer til drift av generatorer. En slik forenkling kan være risikabel siden vi ikke har noen garanti for at de komponenter som er utelatt, påvirker de to systempålitelighetene i samme grad. Vi vil likevel her gjøre samme antagelse. Når et fartøy ikke har strømforsyning, har det heller ikke drift av viktige pumper. Vi vil derfor si at fiskebåten funksjonerer hviss en både har propelldrift og strømforsyning.

Sjøfartsdirektoratet godkjente i 1977 bare en-motor anlegget illustrert i Figur 5.1.1.



Figur 5.1.1

Det tilhørende feiltre er gitt i Figur 5.1.2. Feiltreanalyse er behandlet i Barlow og Proschan (1975a).



Figur 5.1.2

“ELLER”-porten i feiltreet betyr at minst en av feilhendelsene under porten må inntreffe for at feilhendelsen over skal inntreffe. Dette svarer til at den tilhørende duale struktur er en parallelstruktur og dermed at den opprinnelige struktur er en seriestruktur (se Øvelse 2.1.3). Tilsvarende betyr “OG”-porten at alle feilhendelsene under porten må inntreffe for at feilhendelsen over skal inntreffe. Dette svarer til at den tilhørende duale struktur er en seriestruktur og dermed at den opprinnelige struktur er en parallelstruktur. Feiltreet er bygget opp på grunnlag av følgende basishendelser:

$$\begin{aligned}
F1 &= \{\text{Feil på fremdriftsmotor}\} \\
K1 &= \{\text{Feil på hydraulisk operert klutsj}\} \\
H1 &= \{\text{Feil på hjelpemotor}\}
\end{aligned}$$

For dette anlegget er det bare generatoren som er drevet av hjelpemotoren, som produserer strøm ved landligge – i sjøen er det den andre. Grovt regnet er fiskebåtene til sjøs 3000 timer pr. år og ved kai 2000 timer pr. år. Dette betyr at driftstidene pr. år for fremdriftsmotoren og den hydraulisk opererte klutsjen kan settes til 3000 timer og at driftstiden pr. år for hjelpemotoren kan settes til 2000 timer.

Vi skal i det følgende anta at levetidsfordelingene for komponentene er eksponensielle. Siden det dreier seg om mekaniske komponenter, kan dette være urealistisk – Weibull fordelingen hadde vært å foretrekke. Fra Det Norske Veritas ble det på grunnlag av statistiske data oppgitt følgende punkttestimater for feilintensiteten, målt i feil pr. driftstid, for noen mekaniske komponenter:

$$\begin{aligned}
\text{Mekanisk klutsj: } &6.0 \cdot 10^{-6} \\
\text{Magnetisk klutsj: } &3.88 \cdot 10^{-5} \\
\text{Dieselmotor: } &2.96 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

Fiskeriteknologisk Forskningsinstitutt brukte så punkttestimatet for dieselmotoren både for fremdriftsmotoren og hjelpemotoren, mens de i mangel av punkttestimat for den hydraulisk opererte klutsjen rett og slett brukte punkttestimatet for den magnetiske klutsjen. Utfra klassisk statistisk estimering fremkom da følgende estimater for sannsynlighetene for at de enkelte basishendelser skulle inntreffe i løpet av et år:

$$\begin{aligned}
P(F1) &= 1 - \exp(-2.96 \cdot 10^{-4} \cdot 3000) = 0.58852 \\
P(K1) &= 1 - \exp(-3.88 \cdot 10^{-5} \cdot 3000) = 0.10988 \\
P(H1) &= 1 - \exp(-2.96 \cdot 10^{-4} \cdot 2000) = 0.44678
\end{aligned}$$

Dette leder så til følgende estimater:

$$\begin{aligned}
&P(\text{Ingen propelldrift i løpet av et år}) \\
&= 1 - (1 - P(F1))(1 - P(K1)) = 0.63373
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(\text{Ingen strømforsyning i løpet av et år}) \\
&= P(H1)P(F1) = 0.26294
\end{aligned}$$

Fiskeriteknologisk Forskningsinstitutt sluttet herav at:

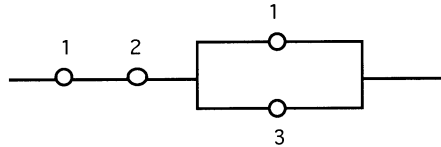
$$\begin{aligned}
&P(\text{Systemfeil i løpet av et år}) \\
&= 1 - (1 - 0.63373)(1 - 0.26294) = 0.73004
\end{aligned}$$

Dette er *galt* fordi en overser den avhengighet som basishendelsen $F1$ skaper i feiltreet.

La oss gjøre dette korrekt ved å innføre følgende binære tilfeldige variable:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } F1 \text{ ikke inntreffer i løpet av et år} \\ 0 & \text{hvis } F1 \text{ inntreffer i løpet av et år} \end{cases} \\
 X_2 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } K1 \text{ ikke inntreffer i løpet av et år} \\ 0 & \text{hvis } K1 \text{ inntreffer i løpet av et år} \end{cases} \\
 X_3 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } H1 \text{ ikke inntreffer i løpet av et år} \\ 0 & \text{hvis } H1 \text{ inntreffer i løpet av et år} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Feiltreet er nå ekvivalent med systemet i Figur 5.1.3.



Figur 5.1.3

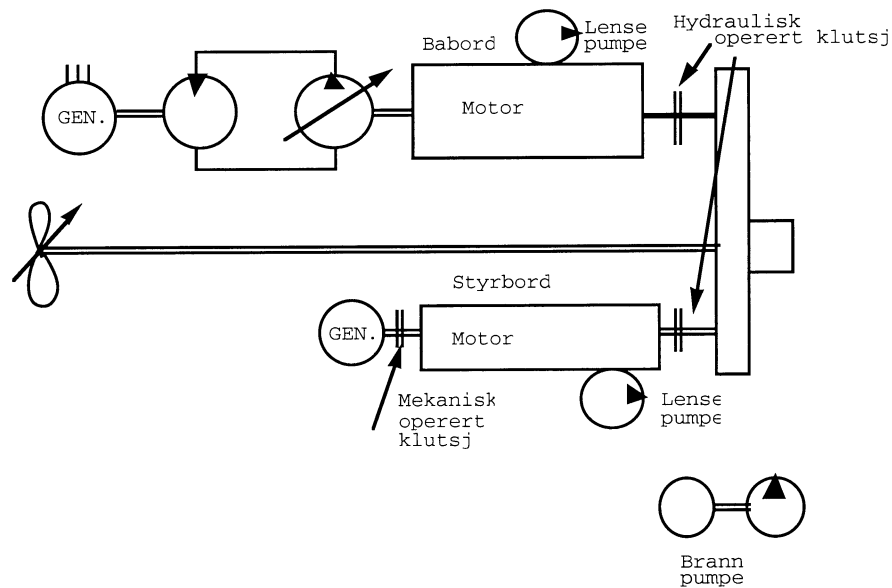
Herav ser vi med en gang at hjelpemotoren er en irrelevant komponent; dvs. det spiller ingen rolle om hjelpemotoren funksjonerer eller ei for at systemet skal funksjonere slik dette siste er definert. Dette innsees også slik:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\underline{X}) &= X_1 X_2 (1 - (1 - X_1)(1 - X_3)) = X_1 X_2 (X_1 + X_3 - X_1 X_3) \\
 &= X_1 X_2 + X_1 X_2 X_3 - X_1 X_2 X_3 = X_1 X_2
 \end{aligned}$$

Dette gir følgende *korrekte* estimat:

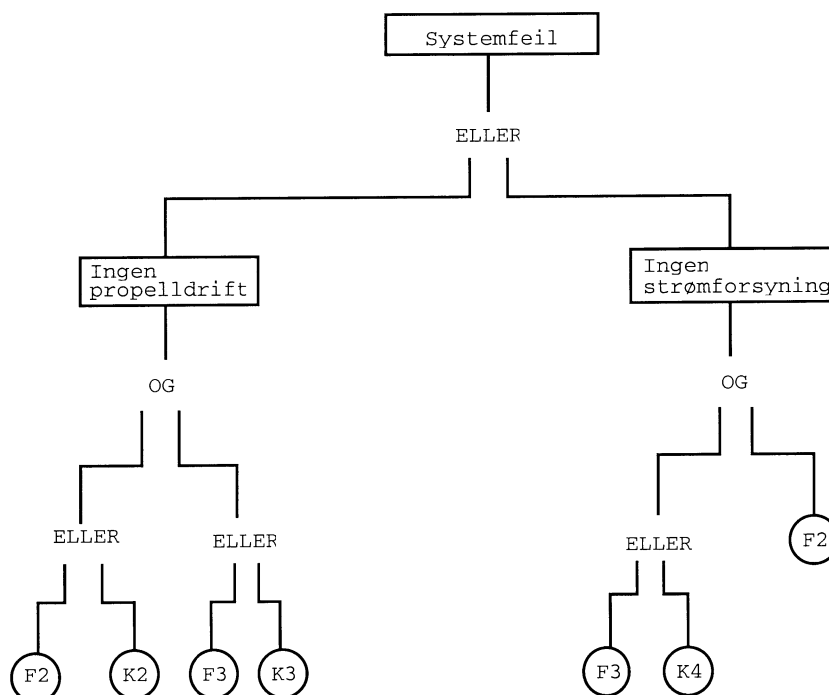
$$\begin{aligned}
 P(\text{Systemfeil i løpet av et år}) &= P(\phi_1(\underline{X}) = 0) = 1 - P(\phi_1(\underline{X}) = 1) \\
 &= 1 - (1 - P(F1))(1 - P(K1)) = 0.63373
 \end{aligned}$$

La oss nå se på det alternative to-motor anlegget gitt i Figur 5.1.4.



Figur 5.1.4

Det tilhørende feiltre er gitt i Figur 5.1.5.



Figur 5.1.5

Feiltreet er bygget opp på grunnlag av følgende basishendelser:

$$F_2 = \{\text{Feil på babord fremdriftsmotor}\}$$

$$K_2 = \{\text{Feil på babord hydraulisk operert klutsj}\}$$

$$F_3 = \{\text{Feil på styrbord fremdriftsmotor}\}$$

$$K_3 = \{\text{Feil på styrbord hydraulisk operert klutsj}\}$$

$$K_4 = \{\text{Feil på mekanisk operert klutsj}\}$$

For dette anlegget er det bare generatoren som er drevet av styrbord fremdriftsmotor, som produserer strøm ved landligge – i sjøen brukes begge motorene. Det er den hydraulisk drevne generatoren alene som produserer strøm når fiskebåten er i sjøen. Dette betyr at driftstiden pr. år for styrbord fremdriftsmotor kan settes til 5000 timer og for den mekanisk opererte klutsjen mellom ovennevnte motor og generatoren til 2000 timer. For babord fremdriftsmotor og de to hydraulisk opererte klutsjene kan driftstiden pr. år settes til 3000 timer.

Utfra punkttestimatene til Det Norske Veritas fremkom da som for en-motor anlegget følgende estimater for sannsynlighetene for at de enkelte basishendelser skulle inntreffe i løpet av et år:

$$\begin{aligned}
P(F2) &= P(F1) = 0.58852 \\
P(K2) &= P(K3) = P(K1) = 0.10988 \\
P(F3) &= 1 - \exp(-2.96 \cdot 10^{-4} \cdot 5000) = 0.77236 \\
P(K4) &= 1 - \exp(-6 \cdot 10^{-6} \cdot 2000) = 0.01192
\end{aligned}$$

Dette leder så til følgende estimater:

$$\begin{aligned}
&P(\text{Ingen propelldrift i løpet av et år}) \\
&= [1 - (1 - P(F2))(1 - P(K2))][1 - (1 - P(F3))(1 - P(K3))] \\
&= 0.63372 \cdot 0.79737 = 0.50532
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(\text{Ingen strømforsyning i løpet av et år}) \\
&= [1 - (1 - P(F3))(1 - P(K4))]P(F2) \\
&= 0.77508 \cdot 0.58852 = 0.45615
\end{aligned}$$

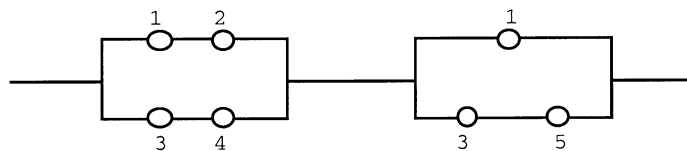
Ved samme feilslutning som for en-motor anlegget sluttet en for to-motor anlegget at:

$$\begin{aligned}
&P(\text{Systemfeil i løpet av et år}) \\
&= 1 - (1 - 0.50532)(1 - 0.45615) = 0.73097
\end{aligned}$$

La oss igjen gjøre dette korrekt ved å innføre følgende binære tilfeldige variable:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } F2 \text{ ikke inntreffer i løpet av et år} \\ 0 & \text{hvis } F2 \text{ inntreffer i løpet av et år} \end{cases} \\
X_2 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } K2 \text{ ikke inntreffer i løpet av et år} \\ 0 & \text{hvis } K2 \text{ inntreffer i løpet av et år} \end{cases} \\
X_3 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } F3 \text{ ikke inntreffer i løpet av et år} \\ 0 & \text{hvis } F3 \text{ inntreffer i løpet av et år} \end{cases} \\
X_4 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } K3 \text{ ikke inntreffer i løpet av et år} \\ 0 & \text{hvis } K3 \text{ inntreffer i løpet av et år} \end{cases} \\
X_5 &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } K4 \text{ ikke inntreffer i løpet av et år} \\ 0 & \text{hvis } K4 \text{ inntreffer i løpet av et år} \end{cases}
\end{aligned}$$

Feiltreet for to-motor anlegget er nå ekvivalent med systemet i Figur 5.1.6:



Figur 5.1.6

Dermed har vi:

$$\begin{aligned}
\phi_2(\underline{X}) &= [1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_3X_4)][1 - (1 - X_1)(1 - X_3X_5)] \\
&= (X_1X_2 + X_3X_4 - X_1X_2X_3X_4)(X_1 + X_3X_5 - X_1X_3X_5) \\
&= X_1X_2 + X_1X_3X_4 - X_1X_2X_3X_4 + X_1X_2X_3X_5 + X_3X_4X_5 \\
&\quad - X_1X_2X_3X_4X_5 - X_1X_2X_3X_5 - X_1X_3X_4X_5 + X_1X_2X_3X_4X_5 \\
&= X_1X_2 + X_1X_3X_4 - X_1X_2X_3X_4 + X_3X_4X_5 - X_1X_3X_4X_5 \\
&= X_1X_2 + X_3X_4[X_1(1 - X_2) + X_5(1 - X_1)]
\end{aligned}$$

Følgelig er nå alle komponentene relevante. Dette gir følgende korrekte estimat for to-motor anlegget:

$$\begin{aligned}
P(\text{Systemfeil i løpet av et år}) \\
&= 1 - P(\phi_2(\underline{X}) = 1) = 1 - E\phi_2(\underline{X}) \\
&= 1 - \{(1 - P(F2))(1 - P(K2)) + (1 - P(F3))(1 - P(K3)) \\
&\quad [(1 - P(F2))P(K2) + (1 - P(K4))P(F2)]\} = 0.50666
\end{aligned}$$

Som en konklusjon ser en at med gal beregningsmåte synes de to anleggene å være like pålitelige. Den korrekte beregningsmåte viste derimot at to-motor anlegget som Sjøfartsdirektoratet ikke godkjente i 1977, var vesentlig mer pålitelig. Dette er egentlig opplagt siden begge motorene i to-motor anlegget kan brukes til både propelldrift og strømforsyning. Ved en-motor anlegget var derimot hjelpemotoren rett og slett en irrelevant komponent.

Det eneste som er nytt i dette case-studiet, bortsett fra feiltrærne, er innføringen av driftstid i stedet for reell tid. La oss se litt nærmere på dette. Vi trenger da bare å gjøre noen mindre forandringer i forhold til den dynamiske systemanalyse som ble presentert i Avsnitt 3.3. La

$$\begin{aligned}
T_i &= \text{levetid for } i\text{-te komponent forutsatt kontinuerlig drift} \\
r_i(t) &= \text{brøkdelen av tiden } i\text{-te komponent er i drift frem til tiden } t
\end{aligned}$$

Med velkjent notasjon har vi da (se Avsnitt 3.3):

$$p_i(t) = P(T_i > r_i(t)t) = 1 - F_i(r_i(t)t) = \bar{F}_i(r_i(t)t)$$

Vi kan raffinere dette ved å la:

$$p_i(t) = \bar{F}_i(r_i(t)t)\bar{G}_i((1 - r_i(t))t),$$

der $\bar{G}_i(t')$ er sannsynligheten for at i -te komponent ikke feiler i løpet av en tid t' der den er ute av drift. Så langt er vi innenfor velkjente grenser.

Det ville imidlertid være langt mer realistisk å erstatte den deterministiske $r_i(t)$ med en tilsvarende tilfeldig variabel $R_i(t)$. $R_i(t)$ -ene blir da opplagt avhengige siden f.eks.

utstrakt drift av en motor medfører mindre drift av en annen i to-motor anlegget. Vi har da:

$$P_i(t) = \overline{F}_i(R_i(t)t) \cdot \overline{G}_i((1 - R_i(t))t),$$

slik at også komponentenes påliteligheter ved tiden t blir tilfeldige variable. $P_i(t)$ -ene blir dessuten avhengige fordi $R_i(t)$ -ene er avhengige. Vi skal ikke gå nærmere inn på disse komplikasjonene. De samme problemene er imidlertid angrepet i Huseby og Bendheim (1980) ved å bruke simulering.

5.2 Pålitelighetsanalyse av et nettverk for overføring av elektroniske pulser

Den analysen som her skal presenteres, er ikke minst av praktiske grunner en god del forenklet. Den er likevel såvidt realistisk at man får et visst inntrykk av kompleksiteten i problemet. Hensikten med dette case-studiet er også å presentere en teknikk som kan være nyttig i mange praktiske pålitelighetsstudier. Før vi beskriver det aktuelle nettverk skal vi gå litt inn på den generelle metodikk som anvendes.

Notasjonen som brukes er stort sett den samme som i Avsnitt 3.3 der en behandlet den dynamiske systemanalyse. Forskjellen er at tilstandene til komponenter og system om ønskelig kan beskrives multinært, dvs. mer nyansert enn ved bare funksjons- og feiltilstand. La

$$X_i(t) = i\text{-te komponents tilstand ved tiden } t,$$

der vi antar at de stokastiske prosessene $\{X_i(t), t \geq 0\}_{i=1}^n$ er uavhengige.

$$\phi(t) = \phi(\underline{X}(t)) = \text{systemets tilstand ved tiden } t$$

I prinsippet kan en også i det multinære tilfellet finne fordelingen til $\phi(t)$ ved total tilstandsoppgransing som i Avsnitt 3.2 A), dvs. en har:

$$P(\phi(t) = \phi_j) = \sum_{\underline{x}} I(\phi(\underline{x}) = \phi_j) P(\underline{X}(t) = \underline{x}), \quad j = 1, \dots, k, \quad (5.2.1)$$

der $I(\phi(\underline{x}) = \phi_j) = 1$ dersom $\phi(\underline{x}) = \phi_j$ og 0 ellers, og $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ er mengden av mulige verdier for ϕ .

Spørsmålet blir så hva en kan gjøre for å redusere antall ledd i summen slik at beregningene blir overkommelige. Sett nå at det finnes variable $Y_1 = Y_1(\underline{X}), \dots, Y_m = Y_m(\underline{X})$ slik at $\phi(t)$ kan skrives på formen:

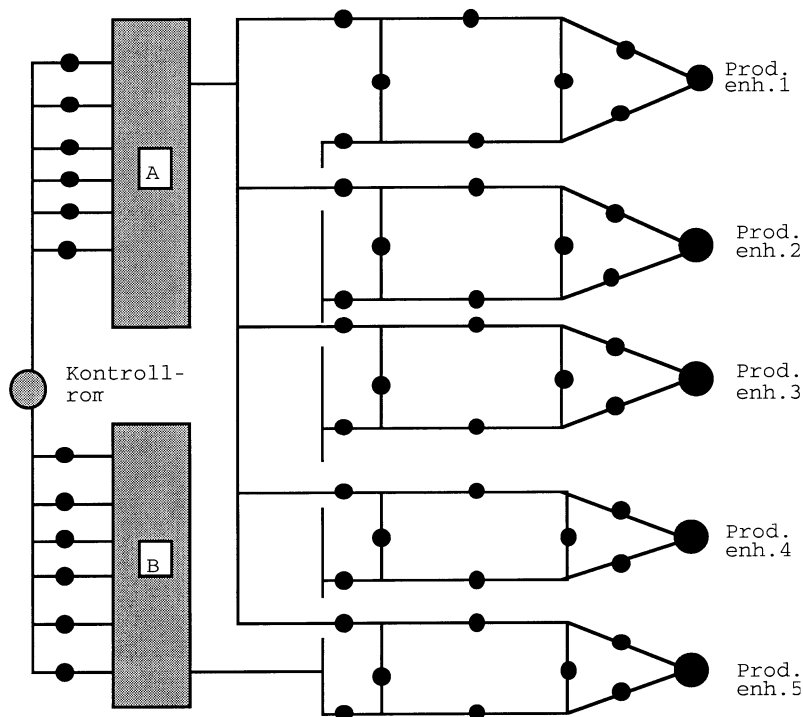
$$\phi(t) = \phi(\underline{X}(t)) = \phi(\underline{Y}(\underline{X}(t))), \quad (5.2.2)$$

der $\underline{Y}(\underline{X}(t)) = (Y_1(\underline{X}(t)), \dots, Y_m(\underline{X}(t)))$. I så fall kan sannsynlighetsfordelingen til ϕ finnes av formelen:

$$P(\phi(t) = \phi_j) = \sum_{\underline{y}} I(\phi(\underline{y}) = \phi_j) P(\underline{Y}(\underline{X}(t)) = \underline{y}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (5.2.3)$$

For å kunne bruke formelen (5.2.3) må man, som man ser, beregne $P(\underline{Y}(\underline{X}(t)) = \underline{y})$ for alle \underline{y} . Dersom mengden av slike \underline{y} er stor, er følgelig lite vunnet ved å bruke (5.2.3) i stedet for (5.2.1). I mange tilfeller kan en imidlertid ved et heldig valg av variablene Y_1, \dots, Y_m oppnå at beregningsmengden blir betydelig redusert.

Det nettverk vi skal se nærmere på er beskrevet i Figur 5.2.1



Figur 5.2.1

Systemet har som oppgave å sørge for kommunikasjon mellom et kontrollrom og 5 produksjonsenheter. På figuren er hver av systemets komponenter merket med en sort prikk. Komponentsvikt fører til at forbindelsen over den tilsvarende prikken brytes. I tillegg består systemet altså av et kontrollrom, 5 produksjonsenheter samt 2 koblingsenheter, A og B. Vi vil se bort fra eventuelle feil i kontrollrom, produksjonsenheter og koblingsenheter. Systemet består dermed av totalt $n = 52$ komponenter.

Som man ser av figuren mottar hver av koblingsenhetene signaler fra kontrollrommet via 6 inputledninger. Koblingsenhetene A og B er videre innrettet slik at antallet produksjonsenheter som kan styres via en koblingsenhet, er begrenset av hvor mange av koblingsenhetens inputledninger som er intakte. Hvis f.eks. 5 eller 6 av inputledningene til koblingsenhet A er intakte, så kan alle 5 produksjonsenheter styres via denne koblingsenheten, forutsatt at kommunikasjonen videre fra koblingsenhet A til de enkelte produksjonsenhetene er i orden. Hvis derimot bare 3 av inputledningene er intakte, kan også høyst 3 produksjonsenheter styres via denne koblingsenheten.

Vi antar, som før, at alle komponenter er stokastisk uavhengige. Videre antar vi at alle de 12 inputledningene har samme levetidsfordeling. Når det gjelder den delen av systemet som sørger for kommunikasjonen fra koblingsenhetene til de enkelte produksjonsenheter, ser vi at denne består av 5 like delsystemer, et for hver produksjonsenhet. Hvert slikt delsystem er satt sammen av 8 komponenter. Vi antar at alle disse delsystemene har samme stokastiske egenskaper. Dvs. at tilsvarende komponenter i de ulike delsystemene har identiske levetidsfordelinger.

Vi har nå:

$$\phi(t) = \text{antall produksjonsenheter som kan styres fra kontrollrommet på tidspunkt } t \quad (5.2.4)$$

ϕ antar følgelig verdier i mengden $\{0, 1, \dots, 5\}$. Vi har med andre ord å gjøre med et multinært system av binære komponenter. Antall ledd i summen i (5.2.1) blir $2^{52} = 4.504 \cdot 10^{15}$ slik at vi umulig kan basere oss på total tilstandsoppramsing. Vi innfører derfor:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{antall intakte inputledninger til koblingsenhet A} \\ Y_2 &= \text{antall intakte inputledninger til koblingsenhet B} \\ Y_3 &= \text{antall produksjonsenheter som har kontakt med begge koblingsenheter} \\ Y_4 &= \text{antall produksjonsenheter som bare har kontakt med koblingsenhet A} \\ Y_5 &= \text{antall produksjonsenheter som bare har kontakt med koblingsenhet B} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Systemets tilstandsvariabel, ϕ , kan nå uttrykkes som:

$$\phi = W_1 + W_2 + W_3, \quad (5.2.6)$$

der vi har innført:

$$W_1 = \min(Y_1, Y_4) \quad W_2 = \min(Y_2, Y_5) \quad W_3 = \min((Y_1 - W_1) + (Y_2 - W_2), Y_3) \quad (5.2.7)$$

Ligning (5.2.6) fremkommer på følgende måte. Vi tenker oss at vi skal fordele de Y_1 inputledningene til koblingsenhet A og de Y_2 inputledningene til koblingsenhet B på de 5 produksjonsenhetene på en slik måte at flest mulig av produksjonsenhetene kan holdes i drift. Dette gjøres ved at vi først fordeler inputledninger til de produksjonsenhetene som bare har kontakt med en koblingsenhet, dvs. de Y_4 produksjonsenhetene som bare har kontakt med koblingsenhet A og de Y_5 produksjonsenhetene som bare har kontakt med koblingsenhet B. På denne måten får vi etablert kontakt med W_1 produksjonsenheter over koblingsenhet A og W_2 produksjonsenheter over koblingsenhet B. Når dette er gjort, står det igjen $(Y_1 - W_1)$ ledige inputledninger ved koblingsenhet A og $(Y_2 - W_2)$ ledige inputledninger ved koblingsenhet B. Disse anvendes så til å få kontakt med så mange som mulig av de Y_3 gjenværende produksjonsenhetene. Antall produksjonsenheter som kan nås på denne måten, er da lik W_3 . Det er selvfølgelig mulig at $(Y_1 - W_1)$ eller $(Y_2 - W_2)$ er null, men dette skaper ikke noe problem for resten av utregningene. Totalt har vi nå etablert kontakt med $W_1 + W_2 + W_3$ produksjonsenheter, som gitt i (5.2.6).

Det neste problemet vi må ta fatt på, er å finne sannsynlighetsfordelingen til Y_1, \dots, Y_5 . Vi ser at Y_1 er en funksjon av tilstandsvariablene til koblingsenhet A's inputledninger, Y_2 er en funksjon av tilstandsvariablene til koblingsenhet B's inputledninger, mens vektoren (Y_3, Y_4, Y_5) er en funksjon av de øvrige 40 komponenters tilstandsvariable. Siden vi har antatt at komponentene er uavhengige, medfører dette at Y_1, Y_2 og vektoren (Y_3, Y_4, Y_5) er uavhengige. Innbyrdes vil imidlertid Y_3, Y_4 og Y_5 være avhengige.

Når det gjelder Y_1 og Y_2 , er begge disse summer av 6 uavhengige, identisk fordelte binære variable. Dette medfører ved standard sannsynlighetsteori at Y_1 og Y_2 blir binomisk fordelte. Dvs.

$$P(Y_s(t) = y) = \binom{6}{y} [p_s(t)]^y [1 - p_s(t)]^{6-y}, \quad y = 0, 1, \dots, 6, s = 1, 2, \quad (5.2.8)$$

der $p_1(t)$ er sannsynligheten for at en gitt inputledning til koblingsenhet A funksjonerer på tidspunkt t , mens $p_2(t)$ er sannsynligheten for at en gitt inputledning til koblingsenhet B funksjonerer på tidspunkt t . I vårt tilfellet har vi antatt at alle inputledningene har samme levetidsfordeling, dvs. vi har $p_1(t) = p_2(t)$ for alle t .

Hva så med fordelingen til (Y_3, Y_4, Y_5) ? Denne vektoren angår bare de 5 delsystemene som sørger for kommunikasjonen mellom produksjonsenhetene og koblingsenhetene. Hvert av disse delsystemene kan være i fire mulige tilstander:

- “AB” = Produksjonsenheten kan kommunisere med begge koblingsenheter
- “A” = Produksjonsenheten kan kommunisere bare med koblingsenhet A
- “B” = Produksjonsenheten kan kommunisere bare med koblingsenhet B
- “Ø” = Produksjonsenheten kan ikke kommunisere med noen koblingsenhet (5.2.9)

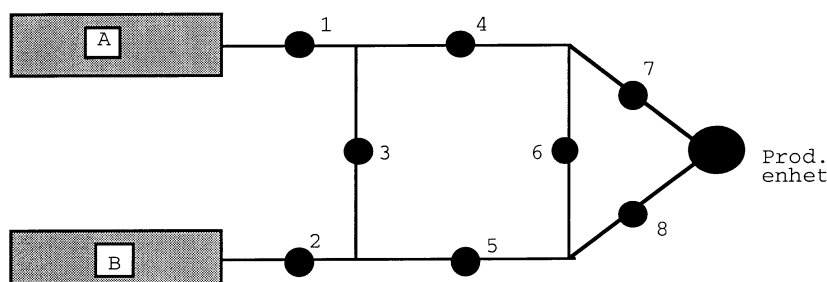
Videre har vi antatt at delsystemene er uavhengige av hverandre samt at hvert av delsystemene har de samme stokastiske egenskaper. Det siste medfører at sannsynligheten for på et gitt tidspunkt å være i en av de fire tilstandene er den samme fra delsystem til delsystem. Endelig ser vi at Y_3, Y_4 og Y_5 angir antall produksjonsenheter i henholdsvis tilstand “AB”, “A” og “B”. Etter standard sannsynlighetsteori blir dermed vektoren (Y_3, Y_4, Y_5) multinomisk fordelt. Dvs. vi har:

$$P(Y_3(t) = y_3 \cap Y_4(t) = y_4 \cap Y_5(t) = y_5) = \frac{5!}{y_3! y_4! y_5! (5 - y_3 - y_4 - y_5)!} [p_3(t)]^{y_3} [p_4(t)]^{y_4} [p_5(t)]^{y_5} [1 - p_3(t) - p_4(t) - p_5(t)]^{5 - y_3 - y_4 - y_5}$$

$$y_3 = 0, 1, \dots, 5, \quad y_4 = 0, 1, \dots, (5 - y_3), \quad y_5 = 0, 1, \dots, (5 - y_3 - y_4), \quad (5.2.10)$$

der $p_3(t), p_4(t)$ og $p_5(t)$ er sannsynlighetene for at et delsystem er i henholdsvis tilstand “AB”, “A” eller “B”.

For å kunne benytte formel (5.2.3) til å beregne fordelingen til ϕ , gjenstår det bare å finne sannsynlighetene $p_3(t), p_4(t)$ og $p_5(t)$. La oss derfor se litt nærmere på strukturen i delsystemene, slik den er illustrert i Figur 5.2.2.



Figur 5.2.2

For anledningen har vi også nummerert komponentene i delsystemet fra 1 til 8 og latt X_1, \dots, X_8 være de tilsvarende tilstandsvariablene. For et gitt tidspunkt t betegnes påliteligheten til de 8 komponentene med q_1, \dots, q_8 , der vi for enkelthets skyld har sløyet t i notasjonen. Vi innfører også begivenhetene $A = \{\text{Produksjonsenheten kommuniserer med koblingsenhet A}\}$ og $B = \{\text{Produksjonsenheten kommuniserer med koblingsenhet B}\}$.

For å finne $p_3(t), p_4(t)$ og $p_5(t)$ beregner vi først $P(A \cap B), P(A)$ og $P(B)$.

Beregning av $P(A \cap B)$.

For å finne sannsynligheten for denne begivenheten betinger vi m.h.p. de to "broene" i strukturen, komponentene 3 og 6, og får:

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A \cap B | X_3 = 1, X_6 = 1)q_3q_6 + P(A \cap B | X_3 = 1, X_6 = 0)q_3(1 - q_6) \\
 &\quad + P(A \cap B | X_3 = 0, X_6 = 1)(1 - q_3)q_6 \\
 &\quad + P(A \cap B | X_3 = 0, X_6 = 0)(1 - q_3)(1 - q_6)
 \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

De 4 betingede sannsynlighetene som inngår i (5.2.11), beregnes ved serie- og parallellreduksjoner, og er gitt ved (se Eks. 3.1.3):

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B | X_3 = 1, X_6 = 1) &= q_1q_2[q_4 + q_5 - q_4q_5][q_7 + q_8 - q_7q_8] \\
 P(A \cap B | X_3 = 1, X_6 = 0) &= q_1q_2[q_4q_7 + q_5q_8 - q_4q_5q_7q_8] \\
 P(A \cap B | X_3 = 0, X_6 = 1) &= q_1q_2q_4q_5[q_7 + q_8 - q_7q_8] \\
 P(A \cap B | X_3 = 0, X_6 = 0) &= q_1q_2q_4q_5q_7q_8
 \end{aligned}$$

Beregning av $P(A)$ og $P(B)$.

Vi bemerker først at for beregning av $P(A)$ er komponent 2 irrelevant. Dersom denne fjernes, ser vi at i dette tilfellet er komponent 3 og komponent 5 i serie. Ved seriereduksjon ender vi opp med en enkel brostruktur koblet i serie med komponent 1. $P(A)$ er da gitt ved (se Eks. 3.1.3):

$$\begin{aligned}
 P(A) &= q_1q_6[q_4 + q_3q_5 - q_3q_4q_5][q_7 + q_8 - q_7q_8] \\
 &\quad + q_1(1 - q_6)[q_4q_7 + q_3q_5q_8 - q_3q_4q_5q_7q_8]
 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Tilsvarende er $P(B)$ gitt ved:

$$P(B) = q_2q_6[q_5 + q_3q_4 - q_3q_4q_5][q_7 + q_8 - q_7q_8] + q_2(1 - q_6)[q_5q_8 + q_3q_4q_7 - q_3q_4q_5q_7q_8] \quad (5.2.13)$$

Dermed har vi:

$$p_3(t) = P(A \cap B), \quad p_4(t) = P(A) - P(A \cap B), \quad p_5(t) = P(B) - P(A \cap B), \quad (5.2.14)$$

og vi er fremme.

Hva har vi så oppnådd med denne reduksjonen? Selv om vi har fått redusert antall variable som må tilstandsoppramses fra 52 til bare 5, er det klart at gevinsten blir noe mindre siden det dreier seg om multinære variable. Vi ser at Y_1 og Y_2 antar 7 verdier hver i mengden $\{0, 1, \dots, 6\}$, mens vektoren (Y_3, Y_4, Y_5) kan anta verdier i mengden $\{(Y_3, Y_4, Y_5) : 0 \leq Y_3 + Y_4 + Y_5 \leq 5\}$. Ved opplisting får vi at

$$\begin{aligned} Y_3 = 5, \quad Y_4 + Y_5 \leq 0 & \text{ gir } 1 \text{ verdi} \\ Y_3 = 4, \quad Y_4 + Y_5 \leq 1 & \text{ gir } 1 + 2 = 3 \text{ verdier} \\ Y_3 = 3, \quad Y_4 + Y_5 \leq 2 & \text{ gir } 3 + 3 = 6 \text{ verdier} \\ Y_3 = 2, \quad Y_4 + Y_5 \leq 3 & \text{ gir } 6 + 4 = 10 \text{ verdier} \\ Y_3 = 1, \quad Y_4 + Y_5 \leq 4 & \text{ gir } 10 + 5 = 15 \text{ verdier} \\ Y_3 = 0, \quad Y_4 + Y_5 \leq 5 & \text{ gir } 15 + 6 = 21 \text{ verdier} \end{aligned}$$

Adderes dette får vi totalt 56 verdier. Tilsammen betyr dette at summen i (5.2.3) i dette tilfellet må inneholde $7 \cdot 7 \cdot 56 = 2744$ ledd. Selv om dette fortsatt er et høyt tall, er det selvfølgelig fullt overkommelig, og sammenlignet med at vi opprinnelig startet ut med $4.504 \cdot 10^{15}$ ledd, er det klart at beregningsmengden er redusert drastisk.

Vi har i dette case-studiet sett hvordan man ved å sammenfatte binære tilstandsvariable til multinære variable kan redusere beregningsmengden drastisk. Metoden er spesielt slagkraftig i tilfeller der systemet er bygd opp av mange like komponenter og har sterke symmetriegenskaper. Ulempen med metoden er at det i praksis ofte kan være vanskelig å finne effektive sammenfatninger. Fordelene med metoden er imidlertid så store at det er vel verdt å bruke litt tid på å lete etter slike.

Appendix 1. Bevis av et sett ulikheter knyttet til inklusjons-eksklusjonsmetoden

Vi vil her bruke nøyaktig samme notasjon som i Avsnitt 3.2 D). Hensikten er å bevise følgende sett av ulikheter:

$$(-1)^{k-1}h \leq (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} S_j, \quad k = 1, \dots, p, \quad (\text{A.1})$$

som jo nettopp er (3.2.3).

Innfør nå følgende disjunkte begivenheter ($s = 1, \dots, p$) :

$$R_s = \{\text{akkurat } s \text{ minimale stiseriestrukturer funksjonerer}\}$$

Vi har da:

$$\begin{aligned} h &= P\left(\bigcup_{j=1}^p E_j\right) = P\left(\bigcup_{s=1}^p R_s\right) = \sum_{s=1}^p P(R_s) \\ &= \sum_{s=1}^p P(R_s)(1 - (1-1)^s) = \sum_{s=1}^p P(R_s)\left(1 - \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (-1)^j 1^{s-j}\right) \\ &= \sum_{s=1}^p P(R_s) \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} (-1)^{j-1} = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \sum_{s=j}^p \binom{s}{j} P(R_s) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ved et lite kombinatorisk resonnement innser en også at

$$S_j = \sum_{s=j}^p \binom{s}{j} P(R_s) \quad (\text{A.3})$$

Ved å innsette (A.3) i (A.2) har vi faktisk bevist (3.2.2), som et lite biprodukt i vår bevisførsel.

Vi innsetter nå (A.2) og (A.3) i (A.1) og får ($k = 1, \dots, p$) :

$$(-1)^{k-1} \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \sum_{s=j}^p \binom{s}{j} P(R_s) \leq (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{s=j}^p \binom{s}{j} P(R_s)$$

Dette er igjen ekvivalent med:

$$(-1)^{k-1} \sum_{j=k+1}^p (-1)^{j-1} \sum_{s=j}^p \binom{s}{j} P(R_s) \leq 0, \quad k = 1, \dots, p$$

(A.1) er dermed bevist hvis vi kan bevise følgende sett av ulikheter:

$$\sum_{s=k+1}^p P(R_s) (-1)^k \sum_{j=k+1}^s (-1)^j \binom{s}{j} \leq 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{A.4})$$

Det er nå tilstrekkelig for å bevise (A.4) at følgende sett av ulikheter holder:

$$(-1)^k \sum_{j=k+1}^s (-1)^j \binom{s}{j} \leq 0, \quad s = k+1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{A.5})$$

Vi antar først at $k = 2r$ og må da vise at:

$$\sum_{j=2r+1}^s (-1)^j \binom{s}{j} \leq 0, \quad s = 2r+1, \dots, p \quad (\text{A.6})$$

Anta videre at $(2r+1) \geq s/2$. (A.6) holder da opplagt siden $\binom{s}{j}$ er avtagende i j for $j \geq s/2$ og fortegnet til den første addenden er $(-1)^{2r+1} = -1$. Anta så $(2r+1) < s/2$. (A.6) er ekvivalent med:

$$(1-1)^s - \sum_{j=0}^{2r} (-1)^j \binom{s}{j} \leq 0, \quad s = 2r+1, \dots, p,$$

som igjen er ekvivalent med:

$$\sum_{j=0}^{2r} (-1)^j \binom{s}{j} \geq 0, \quad s = 2r+1, \dots, p$$

Denne ulikheten holder opplagt siden $\binom{s}{j}$ er voksende i j for $j \leq s/2$ og fortegnet til den siste addenden er $(-1)^{2r} = 1$.

For $k = 2r+1$ bevises (A.5) helt analogt til beviset av (A.6). Dermed er vi fremme. Bemerk til slutt at settet av ulikheter (A.1) gjelder for den generelle addisjonssetning i sin alminnelighet og er ikke spesielt knyttet til anvendelser i pålitelighetsanalyse. Av beviset for (A.1) ser vi at ulikhetene rett og slett skyldes monotone egenskaper hos binomialkoeffisienten.

Appendix 2. Løsningsforslag til et eksamenssett i ST 105

Vi skal her presentere et løsningsforslag til eksamenssettet fra 1986 i kurset med daværende betegnelse “S105 – Innføring i pålitelighetsanalyse” gitt ved Universitetet i Oslo. Leseren oppfordres selvsagt til å prøve å løse oppgavesettet på egen hånd først. Hensikten med å presentere løsningsforslaget er å vise omtrent hvor omfattende en eksamensbesvarelse bør være. Mange studenter har nemlig en tendens til både å drive unødvendig avskrift av oppgaveteksten og til å skrive altfor utflytende.

Det bør presiseres at dette eksamenssettet kanskje ikke er helt representativt for de sett som er gitt frem til nå. Grunnen er at dette settet i svært liten grad har spørsmål som ber studentene om å gjengi deler av pensum. Slike spørsmål hører naturlig hjemme i eksamensoppgaver fra tid til annen, men løsningsforslag for disse burde være unødvendige da de fremgår av pensum. For informasjonens skyld gjengir vi først selve eksamenssettet.

UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i:

S 105 - Innføring i pålitelighetsanalyse

Eksamensdag:

Mandag 8. desember 1986

Tid for eksamen:

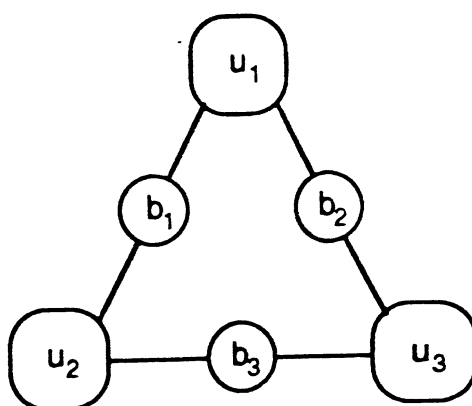
Kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler:

Karl Rottmann: "Mathematische Formelsammlung",
elektronisk lommeregner.

Oppgavesettet er på 6 sider.

Oppgave 1



Figur 1. Produksjonsanlegg med tre produksjonsenheter og tre barrierer.

Vi skal i denne oppgaven se på en brannspredningsmodell for en kjemisk fabrikk. Ved fabrikkens foregår produksjonen i tre enheter u_1 , u_2 og u_3 (se Figur 1). Hver av enhetene kan rammes av brann på to måter: enten ved at det initieres en brann i enheten selv, eller ved at det initieres en brann i en annen enhet som så sprer seg til den første enheten.

I hver produksjonsenhet er det iverksatt visse preventive tiltak for å hindre initiering av brann. Videre er spredning av brann forsøkt hindret ved plassering av barrierer, b_1 , b_2 og b_3 som vist på Figur 1.

Oppgaven fortsetter side 2.

Vi betrakter fabrikken i et tidsintervall, I, og innfører:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis enhet } u_i \text{ ikke rammes av brann i løpet av I.} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{dersom ingen brann initieres i } u_i \text{ i løpet av I.} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis barriere } b_i \text{ er sterk nok til å hindre brannspredning i løpet av I.} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$

Vi antar at en brann spres direkte fra en enhet til en annen hvis og bare hvis barrieren mellom dem svikter. I tillegg kan branner spres indirekte via en tredje enhet hvis og bare hvis de to øvrige barrierene svikter. Således spres f.eks. en brann initiert i u_1 til u_2 hvis og bare hvis $Z_1=0$ eller $1-(1-Z_2)(1-Z_3)=0$, osv.

(a) Vis at vi har følgende sammenheng mellom X_1 og Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2 og Z_3 :

$$X_1 = Y_1 [1 - (1-Y_2)(1-Z_1Z_2)(1-Z_1Z_3)] [1 - (1-Y_3)(1-Z_1Z_2)(1-Z_2Z_3)]$$

Sett også opp de tilsvarende uttrykkene for X_2 og X_3 .

Vi antar at $P(Y_i = 1) = p, i=1, 2, 3$ og $P(Z_i = 1) = \theta, i=1, 2, 3$. Videre antar vi at Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2 og Z_3 er uavhengige.

(b) Diskuter den siste antagelsen. Er X_i -ene assosierte? Gi en kort begrunnelse for svaret.

Vi innfører så: $S = X_1 + X_2 + X_3$ og $T = Y_1 + Y_2 + Y_3$.

Oppgaven fortsetter side 3

(c) Indiker kort en praktisk fortolkning av S. Hva slags fordeling har T?

(d) Beregn $P(S=s | T=t)$ for $t = 0, 1, 2, 3$ og $s = 0, 1, 2, 3$. Bruk dette til å finne den ubetingede fordelingen for S.

Vi skal til slutt betrakte de preventive og spredningshindrende tiltakene som komponenter i tre ulike pålitelighetssystemer. Vi innfører derfor komponentmengden $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der komponentene 1, 2 og 3 representerer de preventive tiltakene i enhetene u_1, u_2 og u_3 henholdsvis, og komponentene 4, 5 og 6 representerer barrierene b_1, b_2 og b_3 henholdsvis.

Vi sier at en komponent virker hvis og bare hvis det tilsvarende tiltak er effektivt. Dvs. tilstandsvariablene til komponentene 1 til 6 blir Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2 og Z_3 henholdsvis.

La så strukturfunksjonene, φ_1, φ_2 og φ_3 , til de tre systemene være definert ved:

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 & \text{dersom } S \geq i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$

(e) Beregn påliteligheten til de tre strukturene.

Oppgave 2.

La (C, φ) være en monoton struktur der $C = \{1, \dots, n\}$. La videre X_1, \dots, X_n være tilstandsvariablene for komponentene, dvs. $X_i = 1$ hvis i -te komponent virker og 0 ellers, $i = 1, \dots, n$, og la $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$.

Vi sier at (C, φ) er en terskel-struktur dersom φ kan uttrykkes på følgende form:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{dersom } \sum_{i=1}^n a_i X_i \geq b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

for passende valgte konstanter a_1, \dots, a_n og b , der $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. (Konstantene a_1, \dots, a_n og b vil naturligvis variere fra struktur til struktur.) Vektoren (a_1, \dots, a_n, b) kalles i så fall en representasjonsvektor for (C, φ) .

(a) Hva slags struktur er (C, φ) dersom $a_1 = a_2 = \dots = a_n = b/k$ der $1 \leq k \leq n$ er et heltall og $b > 0$?

La (C, φ) være en terskel-struktur, og la $i \in C$. La videre $X^{C \setminus \{i\}}$ betegne subvektoren av \mathbf{X} som fremkommer ved å fjerne i -te komponents tilstandsvariabel (dvs. X_i). Vi innfører så følgende strukturfunksjoner:

$$\varphi_{+i}(X^{C \setminus \{i\}}) = \varphi(1_i, \mathbf{X}) \quad , \quad \varphi_{-i}(X^{C \setminus \{i\}}) = \varphi(0_i, \mathbf{X})$$

der $(1_i, \mathbf{X}) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$ og $(0_i, \mathbf{X}) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)$.

(b) Vis at også $(C \setminus \{i\}, \varphi_{+i})$ og $(C \setminus \{i\}, \varphi_{-i})$ er terskel-strukturer.

(c) Vis at også den tilsvarende duale strukturen til (C, φ) er en terskel-struktur.

(d) La (a_1, \dots, a_n, b) være en representasjonsvektor for (C, φ) . Vis at komponent i er i parallell med resten av systemet hvis og bare hvis $a_i \geq b$. Formuler og bevis et tilsvarende kriterium for at i er i serie med resten av systemet.

Anta til slutt spesielt at $C = \{1, 2, 3, 4\}$, at $a_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$, at $b = 5$, at $P(X_i=1) = p_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, og at komponenttilstandene er stokastisk uavhengige.

(e) Finn de minimale sti- og kuttmengdene og beregn påliteligheten til dette systemet.

Oppgave 3.

La (C, φ) være et seriesystem av n komponenter nummerert fra 1 til n , la T_i være levetiden til i -te komponent, $i = 1, \dots, n$, og la T betegne levetiden for hele systemet. Gitt parameteren θ så er T_i -ene uavhengige og eksponensielt fordelte med forventning θ , dvs. tettheten for T_i -ene er gitt ved:

$$f(t | \theta) = \theta^{-1} \exp(-t/\theta), \quad t > 0, \quad \theta > 0.$$

Vi betrakter nå systemet i et tidsintervall $[0, t_0]$ og lar $P(T > t_0 | \theta) =$ Sannsynligheten for at systemet overlever intervallet $[0, t_0]$ gitt θ .

(a) Forklar hvorfor $P(T > t_0 | \theta) = \prod_{i=1}^n P(T_i > t_0 | \theta)$, og beregn så denne sannsynligheten.

Parameteren θ er ukjent og vi antar at vår apriori usikkerhet om θ kan beskrives ved en sannsynlighetstetthet $\pi(\theta)$ gitt ved:

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/\theta), \quad \theta > 0$$

der α og β er passende valgte positive parametre.

(b) Vis at:

$$P(T_i > t_0) = \left(\frac{\beta}{\beta + t_0} \right)^\alpha \quad \text{og} \quad P(T > t_0) = \left(\frac{\beta}{\beta + nt_0} \right)^\alpha$$

Vi innfører så:

$$P^*(t_0) = \prod_{i=1}^n P(T_i > t_0)$$

(c) Anta at man i lys av punkt (a) hadde beregnet sannsynligheten for at systemet overlever intervallet $[0, t_0]$ til å være $P^*(t_0)$ i stedet for det korrekte svaret fra punkt (b). Forklar hva som er galt med en slik fremgangsmåte. Vis spesielt at $P(T > t_0) > P^*(t_0)$ for alle $t_0 > 0$.

[Hint til det siste spørsmålet: Forklar først hvorfor $(\beta + t_0)^n > (\beta^n + n\beta^{n-1}t_0)$ og benytt så dette.]

(d) Anta at vi får vite at et system av nøyaktig samme type som det vi har sett på i denne oppgaven hadde levetid lik s . Hvordan vil du modifisere svaret i (b) på basis av denne opplysningen?

Oppgave 4.

Det har i lengre tid vært vurdert og diskutert hvor den fremtidige hovedflyplassen for Oslo skal ligge. Anta at $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ er mengden av de mulige alternative beslutninger. (a_1 kan f.eks. være utbygging av Fornebu, a_2 kan være bygging av nytt anlegg på Hurum, osv.)

En gruppe eksperter blir tilkalt for å utrede konsekvensene av de ulike beslutningene. Vi antar (for anledningen) at de blir enige om at $c(a_j)$ = konsekvensene av a_j , $j=1, \dots, k$. På tross av ekspertenes enighet, viser det seg likevel umulig å få tatt en beslutning på grunnlag av disse vurderingene.

Diskuter kort hva grunnen til dette kan være, med basis i begrepet 'verdigrunnlag'. Gjør spesielt rede for hvem som er meningsberettiget i debatten.

SLUTT

Arne Bang Huseby

Bent Natvig

Løsningsforslag for eksamen i S105 1986

Oppgave 1.

(a) $X_1 = 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \{(\text{Ingen brann initieres i } u_1) \cap \\ &\quad [(\text{Ingen brann initieres i } u_2) \cup (\text{Barrierene mellom } u_1 \& u_2 \text{ holder})] \cap \\ &\quad [(\text{Ingen brann initieres i } u_3) \cup (\text{Barrierene mellom } u_1 \& u_3 \text{ holder})]\} \\ &\Leftrightarrow \{(Y_1 = 1) \cap [(Y_2 = 1) \cup (Z_1 = Z_2 = 1) \cup (Z_1 = Z_3 = 1)] \cap \\ &\quad [(Y_3 = 1) \cup (Z_1 = Z_2 = 1) \cup (Z_2 = Z_3 = 1)]\} \end{aligned}$$

Dvs.

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1[Y_2 \prod (Z_1 Z_2) \prod (Z_1 Z_3)][Y_3 \prod (Z_1 Z_2) \prod (Z_2 Z_3)] \\ &= Y_1[1 - (1 - Y_2)(1 - Z_1 Z_2)(1 - Z_1 Z_3)][1 - (1 - Y_3)(1 - Z_1 Z_2)(1 - Z_2 Z_3)] \end{aligned}$$

De øvrige uttrykkene blir:

$$\begin{aligned} X_2 &= Y_2[1 - (1 - Y_1)(1 - Z_1 Z_2)(1 - Z_1 Z_3)][1 - (1 - Y_3)(1 - Z_1 Z_3)(1 - Z_2 Z_3)] \\ X_3 &= Y_3[1 - (1 - Y_1)(1 - Z_1 Z_2)(1 - Z_2 Z_3)][1 - (1 - Y_2)(1 - Z_2 Z_3)(1 - Z_1 Z_3)] \end{aligned}$$

(b) Antagelsen om at Y_i -ene er uavhengige (og uavhengige av Z_i -ene) er urimelig dersom:

- (i) Det er felles ytre omstendigheter som påvirker faren for branninitiering (f.eks. lynnedslag i det elektriske anlegget o.l.).
- (ii) Det at det er initiert brann i en enhet fører til endrete forhold for de øvrige enhetene. (En kan f.eks. tenke seg at hele virksomheten ved fabrikken stoppes dersom det initieres en brann i en av enhetene. En slik prosedyre vil typisk påvirke initieringsmulighetene i de andre enhetene i sterk grad).

Antagelsen om at Z_i -ene skal være uavhengige er urimelig dersom f.eks.:

- (iii) Brannene varierer veldig i styrke. I så fall vil typisk informasjon om at en barriere har sviktet indikere at vi har en kraftig brann, som igjen indikerer at det er større sannsynlighet enn normalt for at også andre barrierer svikter.

X_i -ene er assosierte fordi de er ikke-avtagende funksjoner av uavhengige (og dermed assosierte) tilfeldige variable.

(c) $S = X_1 + X_2 + X_3 =$ Antall enheter som ikke rammes av brann i løpet av I.
 $T \sim \text{Bin}(3, p) \quad P(T = t) = \binom{3}{t} p^t (1 - p)^{3-t}, \quad t = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
(d) \quad P(S = s|T = 3) &= \begin{cases} 1 & \text{for } s = 3 \\ 0 & \text{for } s = 0, 1, 2 \end{cases} \\
P(S = s|T = 2) &= \begin{cases} 0 & \text{for } s = 3 \\ \theta^2 & \text{for } s = 2 \\ 2(1 - \theta)\theta^2 & \text{for } s = 1 \\ 3(1 - \theta)^2\theta + (1 - \theta)^3 & \text{for } s = 0 \end{cases} \\
P(S = s|T = 1) &= \begin{cases} 0 & \text{for } s = 2, 3 \\ \theta^2 & \text{for } s = 1 \\ (1 - \theta^2) & \text{for } s = 0 \end{cases} \\
P(S = s|T = 0) &= \begin{cases} 0 & \text{for } s = 1, 2, 3 \\ 1 & \text{for } s = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Den ubetingede fordelingen for S er nå gitt ved:

$$P(S = s) = \sum_{t=0}^3 P(S = s|T = t)P(T = t)$$

Herav:

$$P(S = s) = \begin{cases} p^3 & \text{for } s = 3 \\ \theta^2 \cdot \binom{3}{2} p^2 (1 - p) & \text{for } s = 2 \\ 2(1 - \theta)\theta^2 \binom{3}{2} p^2 (1 - p) + \theta^2 \binom{3}{1} p (1 - p)^2 & \text{for } s = 1 \\ [3(1 - \theta)^2\theta + (1 - \theta)^3] \binom{3}{2} p^2 (1 - p) + (1 - \theta^2) \binom{3}{1} p (1 - p)^2 + \binom{3}{0} (1 - p)^3 & \text{for } s = 0 \end{cases}$$

(e) Påliteligheten til de tre strukturene:

$$\begin{aligned}
h_{\phi_1}(p, \theta) &= P(S \geq 1) = P(S = 1) + P(S = 2) + P(S = 3) \\
&= 6(1 - \theta)\theta^2 p^2 (1 - p) + 3\theta^2 p (1 - p)^2 + 3\theta^2 p^2 (1 - p) + p^3 \\
h_{\phi_2}(p, \theta) &= P(S \geq 2) = P(S = 2) + P(S = 3) \\
&= 3\theta^2 p^2 (1 - p) + p^3 \\
h_{\phi_3}(p, \theta) &= p^3
\end{aligned}$$

Oppgave 2

(a) Dersom $a_1 = \dots = a_n = b/k$, $1 \leq k \leq n$ og $b > 0$, får vi:

$$\phi(\underline{X}) = I\left(\sum_{i=1}^n \frac{b}{k} X_i \geq b\right) = I\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k\right)$$

Dette er strukturfunksjonen for en k -av- n struktur.

$$\begin{aligned}
(b) \quad \phi_{+i}(\underline{X}^{C \setminus \{i\}}) &= \phi(1_i, \underline{X}) = I\left(\sum_{j \neq i} a_j X_j + a_i \geq b\right) \\
&= I\left(\sum_{j \neq i} a_j X_j \geq b - a_i\right) \\
\phi_{-i}(\underline{X}^{C \setminus \{i\}}) &= \phi(0_i, \underline{X}) = I\left(\sum_{j \neq i} a_j X_j \geq b\right)
\end{aligned}$$

Dvs. $(C \setminus \{i\}, \phi_{+i})$ og $(C \setminus \{i\}, \phi_{-i})$ er også terskelstrukturer.

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \phi(\underline{X}) &= I(\sum_{i=1}^n a_i X_i \geq b) \\
 \phi^D(\underline{X}^D) &= 1 - \phi(\underline{1} - \underline{X}^D) = 1 - I(\sum_{i=1}^n a_i (1 - X_i^D) \geq b) \\
 &= I(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i X_i^D < b) = I(\sum_{i=1}^n a_i X_i^D > \sum_{i=1}^n a_i - b) \\
 &= I(\sum_{i=1}^n a_i X_i^D > b'), \quad \text{der } b' = (\sum_{i=1}^n a_i - b), \\
 &= I(\sum_{i=1}^n a_i X_i^D \geq b''), \quad \text{der } b'' = \min_{\underline{x}} \{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : \sum_{i=1}^n a_i x_i > b' \}.
 \end{aligned}$$

Dvs. (C, ϕ^D) er også en terskel-struktur.

(d) Komponent i er i parallell med resten av systemet

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \phi(1_i, \underline{X}) = 1 \quad \text{for alle } (\cdot_i, \underline{X}) \\
 &\Leftrightarrow \phi(1_i, \underline{0}) = 1 \\
 &\Leftrightarrow a_i + \sum_{j \neq i} a_j \cdot 0 = a_i \geq b
 \end{aligned}$$

q.e.d.

Komponent i er i serie med resten av systemet

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \phi(0_i, \underline{X}) = 0 \quad \text{for alle } (\cdot_i, \underline{X}) \\
 &\Leftrightarrow \phi(0_i, \underline{1}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow a_i \cdot 0 + \sum_{j \neq i} a_j \cdot 1 = \sum_{j \neq i} a_j < b
 \end{aligned}$$

(e) Antar til slutt at:

$$C = \{1, 2, 3, 4\} \quad a_i = i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad b = 5, \quad P(X_i = 1) = p_i, \quad i = 1, \dots, 4$$

samt at komponenttilstandene er uavhengige. Dvs. $\phi(\underline{X}) = I(X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 \geq 5)$

Min. stimengder:

$$P_1 = \{1, 4\} \quad P_2 = \{2, 4\} \quad P_3 = \{3, 4\} \quad P_4 = \{2, 3\}$$

Min. kuttmengder:

$$K_1 = \{2, 4\} \quad K_2 = \{3, 4\} \quad K_3 = \{1, 2, 3\}$$

Ved utmultipliseringsmetoden finner vi:

$$\begin{aligned}
\phi(\underline{X}) &= \prod_{j=1}^3 \prod_{i \in K_j} X_i = (X_2 + X_4 - X_2X_4)(X_3 + X_4 - X_3X_4) \\
&\quad (X_1 + X_2 + X_3 - X_1X_2 - X_1X_3 - X_2X_3 + X_1X_2X_3) \\
&= (X_2X_3 + X_3X_4 - X_2X_3X_4 + X_2X_4 + X_4 - X_2X_4 \\
&\quad - X_2X_3X_4 - X_3X_4 + X_2X_3X_4)(X_1 + X_2 + X_3 - X_1X_2 \\
&\quad - X_1X_3 - X_2X_3 + X_1X_2X_3) \\
&= X_1X_2X_3 + X_1X_4 - X_1X_2X_3X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 - X_2X_3X_4 \\
&\quad + X_2X_3 + X_3X_4 - X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3 - X_1X_2X_4 \\
&\quad + X_1X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3 - X_1X_3X_4 + X_1X_2X_3X_4 \\
&\quad - X_2X_3 - X_2X_3X_4 + X_2X_3X_4 + X_1X_2X_3 + X_1X_2X_3X_4 \\
&\quad - X_1X_2X_3X_4 \\
&= X_1X_4 + X_2X_4 + X_2X_3 + X_3X_4 - 2X_2X_3X_4 \\
&\quad - X_1X_3X_4 - X_1X_2X_4 + X_1X_2X_3X_4
\end{aligned}$$

Påliteligheten til systemet er da:

$$\begin{aligned}
h(\underline{p}) &= E\phi(\underline{X}) = p_1p_4 + p_2p_4 + p_2p_3 + p_3p_4 \\
&\quad - 2p_2p_3p_4 - p_1p_3p_4 - p_1p_2p_4 + p_1p_2p_3p_4
\end{aligned}$$

Oppgave 4

(a) Gitt θ er T_i -ene uavhengige. Vi har dermed:

$$\begin{aligned}
P(T > t_0 | \theta) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n T_i > t_0 | \theta\right) = \prod_{i=1}^n P(T_i > t_0 | \theta) \\
P(T_i > t_0 | \theta) &= \int_{t_0}^{\infty} \theta^{-1} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) dt = \left[-\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \right]_{t_0}^{\infty} = \exp\left(-\frac{t_0}{\theta}\right)
\end{aligned}$$

Herav:

$$P(T > t_0 | \theta) = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{t_0}{\theta}\right) = \exp\left(-\frac{nt_0}{\theta}\right).$$

(b) $\theta \sim \pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/\theta)$, $\theta > 0$, $\alpha, \beta > 0$.

$$\begin{aligned}
P(T_i > t_0) &= \int_0^{\infty} P(T_i > t_0 | \theta) \pi(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta + t_0}{\theta}\right) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta^\alpha}{(\beta + t_0)^\alpha} \int_0^\infty \frac{(\beta + t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta + t_0}{\theta}\right) d\theta \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta + t_0}\right)^\alpha
\end{aligned}$$

$P(T > t_0) = \left(\frac{\beta}{\beta + nt_0}\right)^\alpha$ finnes på samme måte ved i regningen over å erstatte t_0 med nt_0 .

$$(c) \quad P^*(t_0) = \prod_{i=1}^n P(T_i > t_0)$$

Dersom man beregner $P(T > t_0)$ til å være $P^*(t_0)$, har man oversett at T_1, \dots, T_n er *avhengige* når θ ikke er kjent.

Skal vise at: $P(T > t_0) > P^*(t_0)$ for alle $t_0 > 0$.

Lemma: $(\beta + t_0)^n > (\beta^n + n\beta^{n-1}t_0) \quad n = 2, 3, \dots$

Bevis:

$$\begin{aligned}
(\beta + t_0)^n &= \beta^n + n\beta^{n-1}t_0 + \binom{n}{2}\beta^{n-2}t_0^2 + \dots + \binom{n}{n-1}\beta t_0^{n-1} + t_0^n \\
&> \beta^n + n\beta^{n-1}t_0 && \text{siden } \beta, t_0 > 0 \\
&&& \text{og } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Vi har nå:

$$\begin{aligned}
P(T > t_0) &> P^*(t_0) \\
&\Downarrow \\
\left(\frac{\beta}{\beta + nt_0}\right)^\alpha &> \left(\frac{\beta}{\beta + t_0}\right)^{n\alpha} \\
&\Downarrow \\
\frac{\beta}{\beta + nt_0} &> \left(\frac{\beta}{\beta + t_0}\right)^n \\
&\Downarrow \\
(\beta + t_0)^n &> (\beta^n + n\beta^{n-1}t_0) \quad \text{som holder ved Lemma.}
\end{aligned}$$

(d) Gitt levetid for et system av samme type = s . Å priorifordelingen for θ oppdateres da til:

$$\pi(\theta|s) = \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \theta^{-(\alpha_1+1)} \exp(-\beta_1/\theta)$$

der

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha + \{\text{Antall komponenter som feilet i det andre systemet}\} \\
&= \alpha + 1 \\
\beta_1 &= \beta + \{\text{Total testtid for de } n \text{ komponentene i det andre systemet}\} \\
&= \beta + ns
\end{aligned}$$

Svarene i (b) modifiseres da til:

$$P(T_i > t_0) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t_0}\right)^{\alpha_1} = \left(\frac{\beta + ns}{\beta + ns + t_0}\right)^{\alpha+1}$$
$$P(T > t_0) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + nt_0}\right)^{\alpha_1} = \left(\frac{\beta + ns}{\beta + n(s + t_0)}\right)^{\alpha+1}$$

Oppgave 4.

Det viktigste å få med her er:

- (1) De ulike ekspertene har forskjellig verdigrunnlag. Dvs. deres subjektive vurdering av de ulike konsekvensene er forskjellige.
- (2) Alle som er berørt av beslutningen er meningsberettiget.

Nærmere detaljer er gitt i Natvig (1987), s. 14–15.

Referanser

- Aven, T. (1994) Pålitelighets- og Risikoanalyse. Universitetsforlaget, Oslo.
- Barlow, R.E. & Proschan, F. (1975a) Statistical theory of reliability and life testing. Probability models. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Barlow, R.E. & Proschan, F. (1975b) Importance of system components and fault tree events. Stoch. Proc. Appl. 3, 153–173.
- Barlow, R.E. & Proschan, F. (1985) Inference for the exponential life distribution. In Theory of reliability, 143–164, Soc. Italiana di Fisica, Bologna, Italy.
- Birnbaum, Z.W. (1969) On the importance of different components in a multicomponent system. In Multivariate analysis-II (ed. P.R. Krishnaiah), 581–592, Academic Press, New York.
- Egeland, T. (1992) On the S-shape theorem. Statistics & Probability Letters 13, 3–4.
- Eide, H. (1986) Bayes estimering av systempålitelighet når komponentenes påliteligheter er beheftet med usikkerhet. Cand.scient. oppgave, Matematisk institutt, Universitetet i Oslo.
- Esary, J.D., Proschan, F. & Walkup, D.W. (1967) Association of random variables, with applications. Ann. Math. Statist. 38, 1466–1474.
- Feller, W. (1971) An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2, Wiley, New York.
- Funnemark, E. & Natvig, B. (1985) Bounds for the availabilities in a fixed time interval for multistate monotone systems. Adv. Appl. Prob. 17, 638–655.
- Fussell J.B. (1975) How to hand-calculate system reliability and safety characteristics. IEEE Trans. Reliability 24, 169–174.

- Huseby, A.B. & Bendheim, R. (1980) Driftssikkerhetsanalyse av to anlegg til drift av propell og til produksjon av strøm for små fiskebåter. Student report, Institutt for Informatikk, Universitetet i Oslo.
- Huseby, A.B. (1984) A unified theory of domination and signed domination with application to exact reliability computations. Statistical Research Report No 3, Institute of Mathematics, University of Oslo.
- Høyland, A. & Rausand, M. (1994) System reliability theory: Models and statistical methods. Wiley, New York.
- Martz, H.F. & Waller, R.A. (1982) Bayesian reliability analysis. Wiley, New York.
- Mastran, D.V. & Singpurwalla, N.D. (1978) A Bayesian estimation of the reliability of coherent structures. *Oper. Res.* 26, 663–672.
- Maymin, Z. (1987) On a conjecture of Barlow and Proschan concerning reliability bounds. *J. Statist. Planning and Inference* 16, 337–344.
- Natvig, B. (1979) A suggestion of a new measure of importance of system components. *Stoch. Proc. Appl.* 9, 319–330.
- Natvig, B. (1980) Improved bounds for the availability and unavailability in a fixed time interval for systems of maintained, interdependent components. *Adv. Appl. Prob.* 12, 200–221.
- Natvig, B. (1982) On the reduction in remaining system lifetime due to the failure of a specific component. *J. Appl. Prob.* 19, 642–652. Correction *J. Appl. Prob.* 20, 713.
- Natvig, B. (1985) New light on measures of importance of system components. *Scand. J. Statist.* 12, 43–54.
- Natvig, B., Sørmo, S., Holen, A.T. & Høgåsen, G. (1986) Multistate reliability theory – a case study. *Adv. Appl. Prob.* 18, 921–932.
- Natvig, B. (1987) Sannsynlighetsvurderinger i atomalderen. Universitetsforlaget, Oslo.
- Natvig, B. & Eide, H. (1987) Bayesian estimation of system reliability. *Scand. J. Statist.* 14, 319–327.
- Norges Offentlige Utredninger 35A (1978) Kjernekraft og sikkerhet. Olje- og energidepartementet.
- Reactor Safety Study (1975) An assessment of accident risks in U.S. commercial nuclear power plants. WASH-1400. Nuclear Regulatory Commission, Washington D.C.
- Ross, S. (1972) Introduction to probability models. Academic Press, New York.
- Satyanarayana, A. (1982) A unified formula for analysis of some network reliability problems. *IEEE Trans. Reliability*, 31, 23–32.