UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2400 — Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse.
Eksamensdag:	Fredag 7. desember 2012.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 12 underpunkter vektlegges likt ved sensuren.

LØSNING

Oppgave 1.

a) Minimale stimengder:

$$\{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,6,7\}, \{5,7\}, \{5,6,3\}, \{5,6,2,4\}$$

Minimale kuttmengder:

$$\{1,5\}, \{1,6,7\}, \{1,2,3,7\}, \{5,2,4\}, \{5,6,3,4\}, \{2,4,6,7\},$$
$$\{3,4,7\}$$

b) Ved å basere oss på de minimale stier får vi i beste fall (før vi trekker sammen) $2^6 - 1 = 63$ ledd ved å bruke utmultipliseringsmetoden. Ved total tilstandsoppramsing får vi $2^7 - 1 = 127$ ledd.

(Fortsettes side 2.)

c) Vi pivotdekomponerer mhp. 2. komponent. Hvis denne komponenten funksjonerer, pivotdekomponerer vi mhp. 6. komponent. Dette gir 2 s-p-systemer. Hvis 2. komponent ikke funksjonerer, får vi et s-p system. Dette gir:

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p}) &= p_2 p_6 (p_1 \amalg p_5)(p_3 \amalg p_4 \amalg p_7) \\ &+ p_2(1-p_6)(p_5p_7 \amalg (p_1(p_3 \amalg p_4))) \\ &+ (1-p_2)((p_5(p_7 \amalg p_3p_6)) \amalg p_1p_4) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} I_B^{(2)} &= h(1_2, \boldsymbol{p}) - h(0_2, \boldsymbol{p}) = p_6(p_1 \amalg p_5)(p_3 \amalg p_4 \amalg p_7) \\ &+ (1-p_6)(p_5p_7 \amalg (p_1(p_3 \amalg p_4))) - (p_5(p_7 \amalg p_3p_6)) \amalg p_1p_4 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} J_B^{(2)} &= h(1_2, \mathbf{1/2}) - h(0_2, \mathbf{1/2}) \\ &= 1/2(1/2 \amalg 1/2)(1/2 \amalg 1/2 \amalg 1/2) \\ &+ 1/2(1/4 \amalg (1/2(1/2 \amalg 1/2))) - (1/2(1/2 \amalg 1/4)) \amalg 1/4 \\ &= 1/2(3/4)(3/4 \amalg 1/2) + 1/2(1/4 \amalg 3/8) - (1/2(3/4 - 1/8)) \amalg 1/4 \\ &= (3/8)(3/4 + 1/2 - 3/8) + 1/2(1/4 + 3/8 - 3/32) - 5/16 \amalg 1/4 \\ &= 3/8(7/8) + 1/2(17/32) - (5/16 + 1/4 - 5/64) \\ &= (21 + 17 - 20 - 16 + 5)/64 = 7/64 = 7/2^{7-1} \end{aligned}$$

Alternativt er:

$J_B^{(2)}$ = antall kritiske stimengder for 2. komponent$/2^{7-1}$

Siden vi har følgende 7 kritiske stimengder for 2. komponent, stemmer svaret over:

$$\{1,2,3\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,3,7\}, \{1,2,3,6,7\}, \{1,2,6,7\}, \{5,6,2,4\}$$

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 2.

a) Se bevis av Teorem 3.4.2 i Natvig (1998).

b) Se bevis av Teorem 3.4.6 i Natvig (1998). Siden $F_i(t)$ er absolutt kontinuerlig, er $\lim_{t\to\infty} p_i(t) = \lim_{t\to\infty} \bar{F}_i(t) = 0$.

c) Se bevis av Teorem 3.4.7 i Natvig (1998).

d) Se punkter etter Definisjon 3.4.4 i Natvig (1998).

e)

$$\begin{aligned} I_B^{(i)}(t) &= \frac{\partial h(\underline{p}(t))}{\partial p_i(t)} = h(1_i, \boldsymbol{p}(t)) - h(0_i, \boldsymbol{p}(t)) \\ &= E[\phi(1_i, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_i, \boldsymbol{X}(t))] \\ &= \sum_{(\cdot_i, \boldsymbol{x})} [\phi(1_i, \boldsymbol{x}) - \phi(0_i, \boldsymbol{x})] P(\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

Har brukt at siden i-te komponent er irrelevant, vil $\phi(1_i, \boldsymbol{x}) - \phi(0_i, \boldsymbol{x}) = 0$ for alle $(\cdot_i, \boldsymbol{x})$. Dermed følger det umiddelbart at $I_{B-P}^{(i)} = 0$. At et mål for den pålitelighetsmessige betydning av en irrelevant komponent er lik 0 er helt naturlig. Ved bruk av Bayes sin formel finner en at $I_{V-F}^{(i)}(t) = 1 - p_i(t)$ hvilket er helt urimelig bortsett fra i det degenererte tilfellet med $p_i(t) = 1$.

Oppgave 3.

a) Siden de minimale stimengdene for et 2-av-3 system er $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, har dette systemet strukturfunksjonen:

$$\begin{aligned} \phi_1(\boldsymbol{x}) &= x_1 x_2 \amalg x_1 x_3 \amalg x_2 x_3 = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3)(1 - x_2 x_3) \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 2 x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Siden de tre komponenttilstandene er uavhengige og alle komponentpålitelighetene er lik p, får vi:

$$h_{\phi_1} = E\phi_1(\boldsymbol{X}) = p^2 + p^2 + p^2 - 2p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

(Fortsettes side 4.)

b) Siden de minimale stimengdene for det nye systemet er $\{1, 4\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, har dette systemet strukturfunksjonen:

$$\begin{aligned}
&\phi_2(\boldsymbol{x}) = x_1x_4 \amalg x_1x_3 \amalg x_2x_3 = 1 - (1 - x_1x_4)(1 - x_1x_3)(1 - x_2x_3) \\
&= x_1x_4 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3x_4 \\
&= x_1x_4 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_3x_4 - x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

Dette gir:

$$h_{\phi_2} = E\phi_2(\boldsymbol{X}) = p^2 + p^2 + p^2 - 2p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

Det er grunn til å bli overrasket over at $h_{\phi_1} = h_{\phi_2}$. Avhengigheten mellom de minimale stiseriestrukturene er nemlig forskjellig i de to systemene.

SLUTT