Løsningsforslag, eksamen STK 4060 våren 2010.

Oppgave 1.

a) En tidsrekke er en stokastisk prosess $\{x_t; t = 1, 2, 3, \ldots\}$ eller $\{x_t; t = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, dvs. en samling av tilfeldige variable indeksert ved en diskret tidsparameter. (i) Tidsrekken er strengt stasjonær hvis $\{x_{t_1}, x_{t_2} \ldots, x_{t_r}\}$ har samme fordeling som $\{x_{t_1+h}, x_{t_2+h} \ldots, x_{t_r+h}\}$ for alle r, alle h og alle valg av $t_1, ..., t_r$. (ii) Tidsrekken er (svakt) stasjonær hvis forventningen μ_t av x_t er konstant i t og autokorrelasjonsfunksjonen $\gamma(s,t) = E((x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t))$ bare avhenger av $|s - t|$.

b) En ARMA(p,q)-prosess er en stasjonær tidsrekke bestemt av sammenhengen $x_t = \phi_1 x_{t-1} + ... + \phi_p x_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + ... + \theta_q w_{t-q}$ der $\phi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$ og w_t er hvit støy med $\sigma_w^2 > 0$. Prosessen er kausal hvis den kan betraktes som bestemt av fortiden, det vil si at vi har en konvergent rekke av formen $x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i w_{t-i}$. En nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at en ARMA(p,q)-prosess skal være kausal, er at røttene i det autoregressive polynomet $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - ... - \phi_p z^p$ alle ligger utenfor enhetssirkelen. I AR(1)-tilfellet $x_t = \phi x_{t-1} + w_t$ svarer dette til $|\phi| < 1$.

c) Autoregressivt polynom: $1 - 0.25z^2$ har røtter ± 2, altså utenfor enhetssirkelen, derfor er prosessen kausal. Modell-ligningen kan skrives:

$$(1 - 0.25B^2)x_t = w_t,$$

så

$$x_t = (1 - 0.25B^2)^{-1} w_t = \sum_{j=0}^{\infty} (0.25B^2)^j w_t = \sum_{j=0}^{\infty} 0.25^j w_{t-2j}.$$

Dette gir

$$Var(x_t) = E(x_t^2) = E\{\sum_{j=0}^{\infty} 0.25^j w_{t-2j} \sum_{k=0}^{\infty} 0.25^k w_{t-2k}\} = \sum_j \sum_k 0.25^{j+k} E(w_{t-2j} w_{t-2k})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} 0.25^{2j} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - 0.25^2} = \sigma^2/0.9375.$$

d) De lineære ligningene som autokorrelasjonen (og autokovariansen) må tilfredsstille, er

$$\rho(h) - 0.25\rho(h-2) = 0, \ \ h \geq 2.$$

Det tilhørende polynomet $1 - 0.25z^2$ har igjen røttene ± 2. Fra dette blir den generelle formen for autokorrelasjonsfunksjonen av formen

$$\rho(h) = c_1 z_1^{-h} + c_2 z_2^{-h} = c_1 2^{-h} + c_2 (-1)^h 2^{-h}.$$

e) Bruker initialbetingelsene. Først:

$$\rho(0) = c_1 + c_2 = 1.$$

Så multipliserer vi modell-ligningen med x_{t-1} og tar forventning:

$$E(x_t x_{t-1}) = 0.25E(x_{t-2} x_{t-1}) + E(w_t x_{t-1}).$$

Det siste leddet er 0 siden $x_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-1-j}$. Altså fra stasjonaritet:

$$\rho(1) = 0.25\rho(1),$$

så $\rho(1) = c_1 2^{-1} - c_2 2^{-1} = 0$ og $c_1 = c_2$. De to ligningene gir $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, og

$$\rho(h) = 2^{-h-1} + (-1)^h 2^{-h-1},$$

eller: $\rho(h) = 2^{-h}$ for h partall; $\rho(h) = 0$ for odde h.

f) Skriv opp modell-ligningen for h erstattet med $t+h$, multipliser med w_t og ta forventning:

$$E(x_{t+h}w_t) = 0.25E(x_{t+h-2}w_t) + E(w_{t+h}w_t).$$

Dividert med $\sqrt{\gamma_x(0)\gamma_w(0)}$ gir dette den homogene ligningen:

$$\rho_{xw}(h) - 0.25\rho_{xw}(h-2) = 0, \quad h = 1, 2, 3, ... \; og \; h = -1, -2, -3, ...$$

Ligningen for positive h har som før den generelle løsningen

$$\rho_{xw}(h) = c_1 2^{-h} + c_2(-1)^h 2^{-h}.$$

For negative h er $\rho_{xw}(h) = \rho_{wx}(-h)$. Ligningen for negative h kan da skrives, om h erstattes med $-h$

$$\rho_{wx}(h) - 0.25\rho_{wx}(h+2) = 0.$$

Denne har polynom $z^2 - 0.25$ med røtter ± 0.5 og den generelle løsningen

$$\rho_{wx}(h) = d_1 2^h + d_2(-1)^h 2^h.$$

Siden $\rho_{wx}(h)$ må være begrenset når $h \to \infty$, krever dette $d_1 = d_2 = 0$ og $\rho_{wx}(h) = 0$ for $h = 1, 2, 3, ...$ Dette er konsistent med at $\gamma_{wx}(h) = E(w(t+h)x(t))$ og $x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j}$, og kunne også ha vært utledet fra det.

Går nå tilbake til ligningen og løsningen for $\rho_{xw}(h)$ for positiv h, og finner først $\rho_{xw}(1) = 0.25\rho_{xw}(-1) = 0$. Dette gir $\rho_{xw}(h) = 0$ for odde h og $c_1 = c_2 = c$. Settes $h = 0$ i den første ligningen under f), finner vi at $\gamma_{xw}(0) = E(x_t w_t) = 0.25\gamma_{xw}(-2) + E(w_t^2) = \sigma^2$. Siden $\gamma_x(0) = \sigma^2/0.9375$ og $\gamma_w(0) = \sigma^2$, blir $\rho_{xh}(0) = \sqrt{0.9375} = 0.968$ og

$$\rho_{xw}(h) = 2c2^{-h} = 0.968 \cdot 2^{-h}$$

når h er et ikke-negativt partall.

Oppgave 2.

La $\gamma(h)$ være autokovariansfunksjonen til x_t. Da er spektraltettheten definert ved

$$f(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \omega h}, \;\; -1/2 \leq \omega \leq 1/2.$$

Den inverse relasjonen er

$$\gamma(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega h} f(\omega) d\omega, \;\; h = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Betingelsen for at disse relasjonene skal holde, er

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty.$$

For $x_t = w_t - 0.5w_{t-1}$ har vi

$$\gamma(h) = E(x_{t+h} x_t) = E[(w_{t+h} - 0.5w_{t+h-1})(w_t - 0.5w_{t-1})],$$

som gir:

$$\gamma(0) = 1 + 0.5^2 = 1.25,$$

$$\gamma(\pm 1) = -0.5,$$

$$\gamma(h) = 0 \;\; for |h| \geq 2.$$

Spektraltettheten blir

$$f(\omega) = 1.25 - 0.5(e^{-2\pi i\omega} + e^{2\pi i\omega}) = 1.25 - cos(2\pi\omega).$$